1G. Correction de l'interrogation n° 10

Exercice 1 (5 points)

Une entreprise emprunte 2 000 000 € à une banque, à rembourser par mensualités sur 10 ans.

Partie A

1. Chaque mensualité coûte 300 euros de plus que la précédente,
   donc, pour tout entier n non nul, $u_{n+1} = u_n + 300$.
   La suite (u_n) est donc arithmétique de raison 300. Son premier terme est $u_1 = 8000$.
2. La suite (u_n) est arithmétique de raison 300 donc :
   pour tout entier n non nul, $u_n = u_1 + 300(n-1)$.
   De plus $u_1 = 8000$, donc pour tout entier n non nul,
   $u_n = 8000 + 300n - 300 = 300n + 7700$.
3. La somme totale remboursée en 10 ans par l'entreprise est :
   $S = u_1 + u_2 + \cdots + u_{120}$.
   Or (u_n) est une suite arithmétique donc $S = 120 \times \dfrac{u_1 + u_{120}}{2}$.
   De plus $u_{120} = 300 \times 120 + 7700 = 43700$,
   donc $S = 120\ \dfrac{8000 + 43700}{2} = 120 \times 25850 = 3\,102\,000$.
   La somme totale remboursée par l'entreprise en 10 ans est donc de 3102000 euros.

Partie B

1. Chaque mois la mensualité augmente de 1 % ,
   donc, pour tout entier n non nul, $v_{n+1} = v_n + \dfrac{1}{100} v_n = 1,01 v_n$.
   La suite (v_n) est donc géométrique de raison $1,01$, de 1^er^ termev_1.
2. La suite (v_n) est géométrique de raison $1,01$,
   donc pour tout entier n non nul, $v_n = v_1 \times 1,01^{n-1}$.
3. Le versement total en 10 ans (120 mois) est de : $V = v_1 + v_2 + \cdots + v_{120}$.
   Or (v_n) est une suite géométrique donc :
   $V = v_1\ \dfrac{1 - 1,01^{120}}{1 - 1,01} = v_1\ \dfrac{1 - 1,01^{120}}{-0,01} = 100 v_1 (1,01^{120} - 1)$
4. Le versement total est de 3 000 000 si et seulement si $V = 3000000$.

$$\begin{aligned} V = 3000000 &\iff 100 v_1 (1,01^{120} - 1) = 3000000 \\ &\iff v_1 = \frac{30000}{1,01^{120} - 1} \\ &\iff v_1 \approx 13041,28 \end{aligned}$$

Pour un rembousement total de 3 000 000, le premier versement doit être de 13041,28 euros.

Exercice 2

Un jeu consiste à miser 10 euros, puis à réaliser un tirage en deux étapes.

1^re^ étape : le joueur tire au hasard un billet dans un panier contenant 8 billets marqués U_1 et 2 billets marqués U_2.

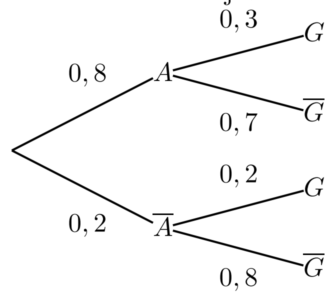
2^e^ étape :

— Si le joueur obtient un billet marqué U_1 il tire un jeton dans l'urne U_1 composée de 7 jetons "perdants" et 3 "gagnants".

— Si le joueur obtient un billet marqué U_2 il tire un jeton dans l'urne U_2 composée de 8 jetons "perdants" et 2 "gagnants".

On note A l'événement "le joueur tire un billet marqué U_1", et G l'événement "le joueur tire un jeton gagnant".

1. Construire un arbre pondéré décrivant le jeu.



2. Montrer que $P(A \cap G) = 0,24$.
   $P(A \cap G) = P(A) \times P_A(G) = 0,8 \times 0,3 = 0,24$.
3. Déterminer $P(G)$.
   A et $\overline{A}$ forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales, on a :
   $P(G) = P(A \cap G) + P(\overline{A} \cap G) = 0,24 + 0,2 \times 0,2 = 0,24 + 0,04 = 0,28$.
4. Déterminer $P_G(A)$.
   $P_G(A) = \dfrac{P(A \cap G)}{P(G)} = \dfrac{0,24}{0,28} = \dfrac{24}{28} = \dfrac{6}{7}$.
5. Le joueur reçoit 35 euros s'il obtient un jeton gagnant de l'urne U_1, et 40 euros s'il obtient une jeton gagnant de l'urne U_2. Sinon il ne gagne rien et perd sa mise. On note X la variable aléatoire qui à chaque partie associe le gain algébrique du joueur.
   (a) Quelles sont les valeurs prises par X ?
   $35 - 10 = 25$, $40 - 10 = 30$, et $0 - 10 = -10$.
   Les valeurs possibles de X sont $25 ; 30 ; -10$.
   (b) Déterminer la loi de X.
   $P(X = 25) = P(A \cap G) = 0,24$.
   $P(X = 30) = P(\overline{A} \cap G) = 0,2 \times 0,2 = 0,04$.
   $P(X = -10) = P(\overline{G}) = 1 - P(G) = 1 - 0,28 = 0,72$.

x_i	25	30	-10
$P(X = x_i)$	0,24	0,04	0,72

(c) Ce jeu est-il équitable ? Justifier.
Le jeu est équitable ssi $E(X) = 0$.
$E(X) = \sum x_i \times p_i = 25 \times 0,24 + 50 \times 0,04 - 10 \times 0,72 = 0$.
Comme $E(X) = 0$, le jeu est équitable.

Exercice 3 (2 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x-5}{2e^x}$.

1. Calculer $f'(x)$.
Comme $e^x > 0$, le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et f est dérivable sur $\mathbb{R}$ par quotient de fonctions dérivables. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$f'(x) = \dfrac{1 \times 2e^x - (x-5) \times 2e^x}{(2e^x)^2} = \dfrac{(6-x) \times 2e^x}{(2e^x)^2} = \dfrac{6-x}{2e^x}$.
2. Déterminer le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$, (et 2>0), on a $2e^x > 0$.
Donc $f'(x)$ est du signe de $6 - x$.
$6 - x = 0$ ssi $x = 6$, et $6 - x$ est une expression de fonction affine avec $a = -1 < 0$. $f(6) = \dfrac{6-5}{2e^6} = \dfrac{1}{2e^6} = \dfrac{e^{-6}}{2}$

x	$-\infty$		6		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$1/(2e^6)$	$\searrow$	

Exercice 4 (4 points)

1. Écrire sous la forme e^K où K est une expression de x.
$A(x) = \dfrac{e(e^{-3x})^2}{e^{5x}}$ $\quad \boxed{A(x) = \dfrac{e(e^{-3x})^2}{e^{5x}} = \dfrac{e^1 \times e^{-6x}}{e^{5x}} = e^{1-6x-5x} = e^{1-11x}}$
2. Étudier le signe sur $\mathbb{R}$ de l'expression $B(x) = 7e^x - xe^x$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $B(x) = e^x(7 - x)$.
Or, $e^x > 0$ sur $\mathbb{R}$, donc $B(x)$ a le même signe que $7 - x$, expression affine avec $a = -1 < 0$. En outre, $7 - x = 0$ ssi $x = 7$.

x	$-\infty$		7		$+\infty$
$B(x)$		$+$	0	$-$	

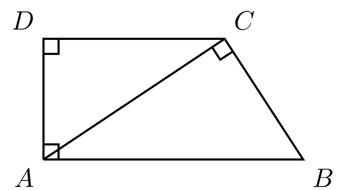
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(e^x - e^2)(e^{-x} + 1) = 0$.
$(e^x - e^2)(e^{-x} + 1) = 0$ ssi $e^x - e^2 = 0$ ou $e^{-x} + 1 = 0$.
$e^x - e^2 = 0$ ssi $e^x = e^2$ ssi $x = 2$.
Comme une exponentielle est toujours strictement positive, l'équation $e^{-x} + 1 = 0$ n'a pas de solution.
$\boxed{\text{Donc l'équation admet une seule solution qui est 2.}}$
4. Soit f fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 20(x-1)e^{-0,5x}$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (-10x + 30)e^{-0,5x}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned} f'(x) &= 20 \times [1e^{-0,5x} + (x-1) \times (-0,5)e^{-0,5x}] \\ &= 20 \times (1 - 0,5(x-1))e^{-0,5x} \\ &= (-10x + 30)e^{-0,5x} \end{aligned}$$

Exercice 5 (2 points)

Dans un repère orthonormé, soient les points $E(3;5)$, $F(-1;4)$ et $G(-6;0)$.

1. Calculer $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EG}$, puis les longueurs EF et EG. $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} x_F - x_E \\ y_F - y_E \end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} -1-3 \\ 4-5 \end{pmatrix}$,donc $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix}$. De même, $\overrightarrow{EG}\begin{pmatrix} -9 \\ -5 \end{pmatrix}$.
$\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EG} = xx' + yy' = -4 \times (-9) + (-1) \times (-5) = 36 + 5 = 41$.
$EF = \sqrt{(x_F - x_E)^2 + (y_F - y_E)^2} = \sqrt{16 + 1} = \sqrt{17}$.
$EG = \sqrt{(x_G - x_E)^2 + (y_G - y_E)^2} = \sqrt{81 + 25} = \sqrt{106}$.
2. En déduire une valeur approchée au degré près de la mesure de l'angle $\widehat{FEG}$.
$\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EG} = EF \times EG \times \cos \widehat{FEG}$.
Donc $\cos(\widehat{FEG}) = \dfrac{\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EG}}{EF \times EG} = \dfrac{41}{\sqrt{17} \times \sqrt{106}}$.
À la calculatrice, Arccos $\left(\dfrac{41}{\sqrt{17} \times \sqrt{106}}\right) \approx 15,0183$.
Donc, au degré près, $\widehat{FEG} \approx 15$ degrés.

Exercice 6 (2 points)



$ABCD$ est un trapèze rectangle en A dont la diagonale $[AC]$ est perpendiculaire au côté $[BC]$.
En exprimant $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ de deux manières différentes, justifier que $AC^2 = AB \times CD$.
Soit H le projeté orthogonal de C sur (AB).
Alors $ADCH$ est un rectangle, et $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{DC}$.
Par projeté orthogonal, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} = AB \times DC = AB \times CD$.
Le projeté orthogonal de B sur la droite (AC) est le point C.
Donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = AC^2$.
Ainsi, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times CD = AC^2$.