Éléments de correction du contrôle type bac

Exercice 1 (Restitution organisée de connaissances 2 points)

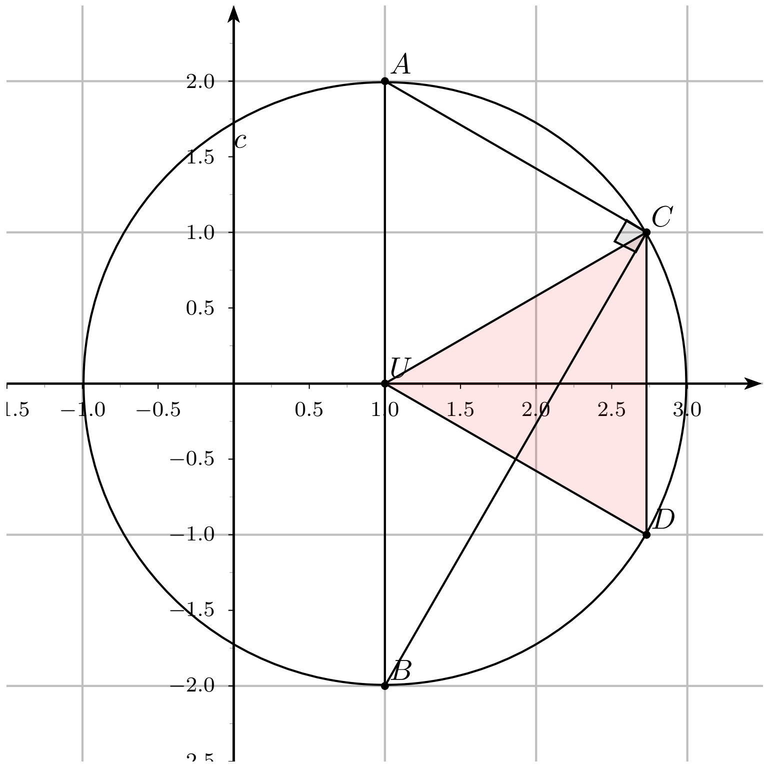
Pré-requis : Si une variable aléatoire T suit la loi exponentielle de paramètre λ (avec $\lambda > 0$), la densité de probabilité de la loi de T est la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(t) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}$.
On souhaite déterminer l'espérance de la variable T.

1. Déterminer les réels a et b tels que la fonction F définie sur $[0;+\infty[$ par $F(t) = (at+b)\mathrm{e}^{-\lambda t}$ soit une primitive de la fonction $t \mapsto tf(t)$ sur $[0;+\infty[$.
   La fonction F est dérivable qur $[0;+\infty[$, et
   $$\begin{aligned} F'(t) &= a\mathrm{e}^{-\lambda t} + (at+b) \times (-\lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}) \\ &= [-\lambda at + (a - \lambda b)]\mathrm{e}^{-\lambda t} \end{aligned}$$
   Pour obtenir $F'(t) = \lambda t\mathrm{e}^{-\lambda t}$, on identifie les coefficients des polynômes dans les deux expressions :
   $\begin{cases} -\lambda a = \lambda \\ a - \lambda b = 0 \end{cases}$, donc $\begin{cases} a = -1 \\ b = -\dfrac{1}{\lambda} \end{cases}$.
   $\boxed{\text{Ainsi, } F(t) = \left(-t - \dfrac{1}{\lambda}\right)\mathrm{e}^{-\lambda t}.}$
2. En déduire que pour tout $M > 0$, $\displaystyle\int_0^M tf(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda}\left(-\lambda M\mathrm{e}^{-\lambda M} - \mathrm{e}^{-\lambda M} + 1\right)$.
   $$\begin{aligned} \int_0^M tf(t)\,\mathrm{d}t &= F(M) - F(0) \\ &= \dots \\ &= \frac{1}{\lambda}\left(-\lambda M\mathrm{e}^{-\lambda M} - \mathrm{e}^{-\lambda M} + 1\right) \end{aligned}$$
3. En déduire la valeur de $E(T)$.
   Comme $\lambda > 0$, $\displaystyle\lim_{M\to+\infty} -\lambda M = -\infty$.
   Or, $\displaystyle\lim_{X\to-\infty} X\mathrm{e}^X = 0$, et $\displaystyle\lim_{X\to-\infty} \mathrm{e}^X = 0$.
   Par composée, $\displaystyle\lim_{M\to+\infty} -\lambda M\mathrm{e}^{-\lambda M} = 0$, et $\displaystyle\lim_{M\to+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda M} = 0$.
   Par somme, $\displaystyle\lim_{M\to+\infty}\left(-\lambda M\mathrm{e}^{-\lambda M} - \mathrm{e}^{-\lambda M} + 1\right) = 1$.
   Par produit, $\displaystyle\lim_{M\to+\infty}\int_0^M tf(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda}$.
   $\boxed{E(T) = \displaystyle\int_0^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda}.}$

Exercice 2 (4 points)

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation
   $$z^2 - 2z + 5 = 0.$$
   $\Delta = \dots = -16$.
   $z_1 = \dots = 1 - 2\mathrm{i}$.
   $z_2 = \dots = 1 + 2\mathrm{i}$.
   $\boxed{\text{Les solutions sont } 1 + 2\mathrm{i} \text{ et } 1 - 2\mathrm{i}.}$
2. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u};\vec{v})$ d'unité graphique 2 cm.
   On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_\mathrm{A}, z_\mathrm{B}, z_\mathrm{C}$ et z_D où :
   $$z_\mathrm{A} = 1 + 2\mathrm{i}, \quad z_\mathrm{B} = \overline{z_\mathrm{A}}, \quad z_\mathrm{C} = 1 + \sqrt{3} + \mathrm{i}, \quad z_\mathrm{D} = \overline{z_\mathrm{C}}.$$

(a) Placer les points A et B dans le repère $(O;\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})$.



(b) Calculer $\dfrac{z_{\mathrm{B}}-z_{\mathrm{C}}}{z_{\mathrm{A}}-z_{\mathrm{C}}}$ et donner le résultat sous forme algébrique.

$\dfrac{z_{\mathrm{B}}-z_{\mathrm{C}}}{z_{\mathrm{A}}-z_{\mathrm{C}}}=\cdots=\dfrac{-\sqrt{3}-3\mathrm{i}}{-\sqrt{3}+\mathrm{i}}=\cdots=\sqrt{3}\mathrm{i}.$

(c) En déduire la nature du triangle ABC.

$\left|\dfrac{z_{\mathrm{B}}-z_{\mathrm{C}}}{z_{\mathrm{A}}-z_{\mathrm{C}}}\right|=\dfrac{CB}{CA}=\sqrt{3}.$

$CA\neq CB$, ABC n'est pas isocèle en C.

$\arg\left(\dfrac{z_{\mathrm{B}}-z_{\mathrm{C}}}{z_{\mathrm{A}}-z_{\mathrm{C}}}\right)=\dfrac{\pi}{2}\quad[2\pi]$ car $\mathrm{i}\sqrt{3}$ est imaginaire pur de partie imaginaire strictement positive.

Donc $(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB})=\dfrac{\pi}{2}\quad[2\pi]$.

$\boxed{\text{Le triangle } ABC \text{ est rectangle en } C \text{ (direct).}}$

3. Démontrer que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle Γ dont on précisera le centre et le rayon.

   Comme ABC est rectangle en C, le cercle circonscrit au triangle ABC est le cercle de diamètre $[AB]$.

   Son centre est le point U milieu de $[AB]$.

   $z_U=\dfrac{z_A+z_B}{2}=\cdots=1.$

   $r=UA=|z_U-z_A|=\cdots=2.$

   Comme U est sur l'axe des abscisses, le cercle est symétrique par rapport à (Ox), donc le symétrique D de C par rapport à (Ox) appartient aussi au cercle.

   Autre méthode : on vérifie par des calculs de modules que $UD=UC=UA=UB=2$.

   $\boxed{\text{A, B, C et D sont sur le cercle de centre U (d'affixe 1) et de rayon 2.}}$

4. Construire les points C et D dans le repère $(O;\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})$. Expliquer la construction proposée.

   $z_C=1+\sqrt{3}+\mathrm{i}$, et $z_D=1+\sqrt{3}-\mathrm{i}$.

   $\boxed{\text{$C$ est le point du cercle d'ordonnée 1 et d'abscisse supérieure à 1. D est le point du cercle d'ordonnée -1 et d'abscisse supérieure à 1.}}$

5. Soit U le point d'affixe $z_{\mathrm{U}}=1$.

(a) Calculer la forme algébrique puis la forme trigonométrique de $\dfrac{z_{\mathrm{D}} - z_{\mathrm{U}}}{z_{\mathrm{C}} - z_{\mathrm{U}}}$.

$\dfrac{z_{\mathrm{D}} - z_{\mathrm{U}}}{z_{\mathrm{C}} - z_{\mathrm{U}}} = \cdots = \dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$\left|\dfrac{z_{\mathrm{D}} - z_{\mathrm{U}}}{z_{\mathrm{C}} - z_{\mathrm{U}}}\right| = \cdots = 1$.

Soit $\theta = \arg \dfrac{z_{\mathrm{D}} - z_{\mathrm{U}}}{z_{\mathrm{C}} - z_{\mathrm{U}}}$.

$\cos\theta = \dfrac{1}{2}$, $\sin\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Donc $\theta = -\dfrac{\pi}{3} \quad [2\pi]$.

$\boxed{\text{Sous forme trigonométrique, } \dfrac{z_{\mathrm{D}} - z_{\mathrm{U}}}{z_{\mathrm{C}} - z_{\mathrm{U}}} = 1\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right).}$

(b) En déduire la nature du triangle UCD.

$\left|\dfrac{z_{\mathrm{D}} - z_{\mathrm{U}}}{z_{\mathrm{C}} - z_{\mathrm{U}}}\right| = \dfrac{UD}{UC} = 1$.

$\arg \dfrac{z_{\mathrm{D}} - z_{\mathrm{U}}}{z_{\mathrm{C}} - z_{\mathrm{U}}} = -\dfrac{\pi}{3}$.

Par conséquent, $UC = UD$ et $(\overrightarrow{UC};\overrightarrow{UD}) = -\dfrac{\pi}{3} \quad [2\pi]$.

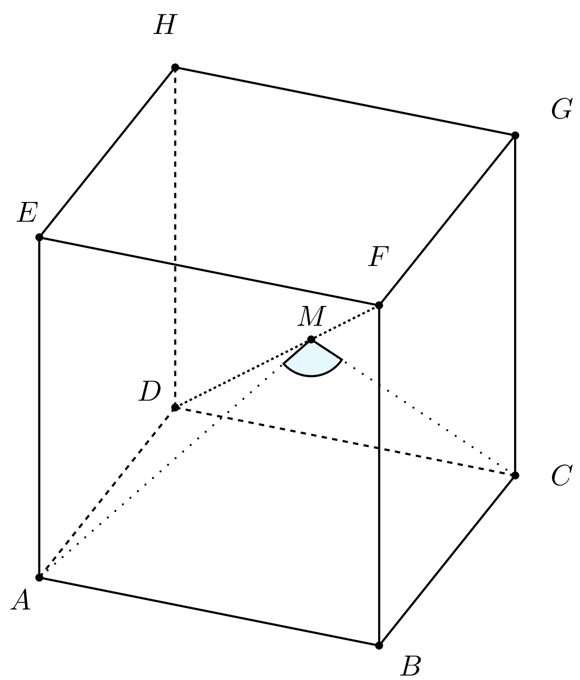
$\boxed{\text{Le triangle UCD est équilatéral (indirect).}}$

Exercice 3 (5 points)

On considère un cube $ABCDEFGH$.

On se place dans le repère orthonormé $(D;\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DH})$.

Les deux parties sont indépendantes.



Partie 1

On considère un point M mobile sur le segment $[DF]$.

On cherche la position de M sur le segment $[DF]$ qui rend la mesure de l'angle $\widehat{AMC}$ et la valeur de ce maximum.

1. Justifier que $\begin{cases} x = t \\ y = t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$ est une représentation paramétrique de la droite (DF).

$\boxed{\text{La droite } (DF) \text{ passe par le point } D(0;0;0) \text{ et est dirigée par } \overrightarrow{DF}(1;1;1).}$

2. Exprimer le produit scalaire $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC}$ en fonction de t.
   $M(t;t;t)$, $A(1;0;0)$,et $C(0;1;0)$.
   Donc $\overrightarrow{MA}(1-t;-t;-t)$, et $\overrightarrow{MC}(-t;1-t;-t)$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} &= \ldots \\ &= 3t^2 - 2t \end{aligned}$$

3. En déduire que $\cos \widehat{AMC} = 1 - \dfrac{1}{3t^2 - 2t + 1}$ où la mesure de $\widehat{AMC}$ est exprimée radian.
   D'après la formule du cosinus,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} &= MA \times MC \times \cos \widehat{AMC} \\ &= \sqrt{(1-t)^2 + 2t^2}^2 \cos \widehat{AMC} \\ &= \ldots \\ &= (3t^2 - 2t + 1) \cos \widehat{AMC} \end{aligned}$$

   Donc $\cos \widehat{AMC} = \dfrac{3t^2 - 2t}{3t^2 - 2t + 1} = 1 - \dfrac{1}{3t^2 - 2t + 1}$.

4. Soit f la fonction définie sur $[0;1]$ par $f(t) = 1 - \dfrac{1}{3t^2 - 2t + 1}$.

   (a) Étudier les variations de f.
   On étudie le polynôme $3t^2 - 2t + 1$.
   $\Delta = \cdots = -8 < 0$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $3t^2 - 2t + 1 > 0$ (signe de a).
   La fonction polynôme $t \mapsto 3t^2 - 2t + 1$ est dérivable et ne s'annule pas sur $[0;1]$.
   Par quotient et somme, f est dérivable sur $[0;1]$.
   $f'(t) = \cdots = \dfrac{6t - 2}{(3t^2 - 2t + 1)^2}$, du signe de $6t - 2$ puisque le dénominateur est toujours positif.
   $6t - 2 = 0$ pour $t = \dfrac{1}{3}$.
   $f(0) = 0$, et $f(1) = \dfrac{1}{2}$.
   $f\left(\dfrac{1}{3}\right) = \cdots = -\dfrac{1}{2}$.

t	0		1/3		1
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	0	↘	$-1/2$	↗	1/2

   (b) En déduire les valeurs exactes de t et de $\widehat{AMC}$ qui sont les réponses au problème.
   La mesure en radian d'un angle géométrique est dans $[0;\pi]$, et la fonction cosinus est décroissante sur $[0;\pi]$.
   Donc la mesure de l'angle $\widehat{AMC}$ est maximale lorsque son cosinus est minimal.

Or, $\cos \widehat{AMC} = f(t)$.

Donc $\widehat{AMC}$ est maximal lorsque $t = \dfrac{1}{3}$ (M est situé à 1/3 de $[DF]$ en partant de D).
Comme on a alors $\cos \widehat{AMC} = -\dfrac{1}{2}$, on en déduit que la mesure maximale de l'angle $\widehat{AMC}$ est $\dfrac{2\pi}{3}$.

Partie 2

Soit I le milieu de $[BC]$.

1. Déterminer une représentation paramétrique du plan (DFI).
   $I(1/2; 1; 0)$, $D(0; 0; 0)$, et $F(1; 1; 1)$.
   Le plan (DFI) passe par $D(0; 0; 0)$ et est dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{DF}(1; 1; 1)$ et $\overrightarrow{DI}(1/2; 1; 0)$.
   On peut vérifier qu'ils ne sont pas colinéaires, le plan est bien défini.

   Une représentation paramétrique du plan (DFI) est $\begin{cases} x = a + \dfrac{1}{2}b \\ y = a + b \quad a, b \in \mathbb{R} \\ z = a \end{cases}$

2. Montrer que la droite (EC) et le plan (DFI) sont sécants en un point K dont on déterminera les coordonnées.
   $E(1; 0; 1)$ et $C(0; 1; 0)$.
   La droite (EC) passe par $C(0; 1; 0)$ et est dirigée par $\overrightarrow{EC}(-1; 1; -1)$.

   Une représentation paramétrique de (EC) est $\begin{cases} x = -t \\ y = 1 + t \quad , t \in \mathbb{R} \\ z = -t \end{cases}$

   On cherche s'il existe des réels a, b et t tels que
   $$\begin{cases} a + \dfrac{1}{2}b & = & -t \\ a + b & = & 1 + t \\ a & = & -t \end{cases}, \cdots$$
   On obtient $a = \dfrac{1}{2}$, $b = 0$, et $t = -\dfrac{1}{2}$.
   En remplaçant t par $-\dfrac{1}{2}$ dans l'équation de (EC), on obtient $x = y = z = \dfrac{1}{2}$.

   Le plan (DFI) et la droite (EC) se coupent en $K\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$.

3. La droite (EC) est-elle perpendiculaire au plan (DFI) ? Justifier.
   Un droite est perpendculaire à un plan ssi elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan.
   $\overrightarrow{EC}(-1; 1; -1)$, et $\overrightarrow{DF}(1; 1; 1)$.
   $\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{DF} = -1 + 1 - 1 = -1 \neq 0$.
   Donc $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{DF}$ ne sont pas orthogonaux.
   La droite (EC) n'est donc pas orthogonale à (DF).

   (EC) n'est pas perpendiculaire au plan (DFI).

Exercice 4 (5 points)
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right) + \frac{1}{3}x.$$

La courbe $(\mathcal{C})$ représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal est donnée ci-dessous.

Partie A

1. (a) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
   $\lim\limits_{x\to+\infty} -x = -\infty$, et $\lim\limits_{X\to-\infty} \mathrm{e}^{X} = 0$.
   Par composée, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$.
   Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} + 1 = 1$.
   Par composée, $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1 + \mathrm{e}^{-x}) = \ln 1 = 0$.
   Par ailleurs, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{3}x = +\infty$.
   $\boxed{\text{Par somme, } \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.}$

   (b) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - \frac{1}{3}x = 0$.
   Cela signifie que la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{3}x$ est asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$ en $+\infty$.
   $f(x) - \frac{1}{3}x = \ln(1 + \mathrm{e}^{-x})$.
   On a vu que $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1 + \mathrm{e}^{-x}) = \ln 1 = 0$.
   $\boxed{\text{Donc } \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - \frac{1}{3}x = 0.}$

   (c) Étudier la position relative de (D) et de $(\mathcal{C})$.
   On étudie le signe de $f(x) - \frac{1}{3}x = \ln(1 + \mathrm{e}^{-x})$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-x} > 0$, et donc $1 + \mathrm{e}^{-x} > 1$.
   Or, la fonction ln est strictement croissante sur $]0; +\infty[$ et $\ln(1) = 0$.
   Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln(1 + \mathrm{e}^{-x}) > 0$.
   $\boxed{\text{La courbe de } f \text{ est toujours au-dessus de la droite (D).}}$

   (d) Montrer que pour tout réel x, $f(x) = \ln\left(\mathrm{e}^{x} + 1\right) - \frac{2}{3}x$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right) + \frac{1}{3}x \\ &= \ln\left(1 + \frac{1}{\mathrm{e}^{x}}\right) + \frac{1}{3}x \\ &= \ln\left(\frac{\mathrm{e}^{x} + 1}{\mathrm{e}^{x}}\right) + \frac{1}{3}x \\ &= \ldots \\ &= \ln\left(\mathrm{e}^{x} + 1\right) - \frac{2}{3}x \end{aligned}$$

   (e) En déduire la limite de f en $-\infty$.
   $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{x} + 1 = 0 + 1 = 1$.
   Par composée, $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(1 + \mathrm{e}^{x}) = \ln 1 = 0$.
   Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} -\frac{2}{3}x = +\infty$.
   $\boxed{\text{Par somme, } \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.}$

2. (a) On note f' la fonction dérivée de la fonction f.
   Montrer que pour tout x réel, $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - 2}{3\left(\mathrm{e}^x + 1\right)}$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 + \mathrm{e}^x > 0$.
   La fonction $x \mapsto 1 + \mathrm{e}^x$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $]0;+\infty[$ où ln est dérivable. Par composée, et somme, f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} - \frac{2}{3} \\ &= \frac{3\mathrm{e}^x - 2(1+\mathrm{e}^x)}{3(1+\mathrm{e}^x)} \\ &= \frac{\mathrm{e}^x - 2}{3(1+\mathrm{e}^x)} \end{aligned}$$

   (b) En déduire les variations de la fonction f.
   Comme $1 + \mathrm{e}^x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $\mathrm{e}^x - 2$.

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^x - 2 &> 0 \\ \mathrm{e}^x &> 2 \\ x &> \ln 2 \end{aligned}$$

   (on a appliqué la fonction ln strictement croissante sur $]0;+\infty[$, donc on conserve le sens de l'inégalité).

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\ln 2)$	$\nearrow$	$+\infty$

   $f(\ln 2) = \cdots = \ln 3 - \dfrac{2}{3}\ln 2$.

Partie B

Soit n un entier naturel non nul. On appelle d_n, l'aire, en unités d'aire, du domaine du plan délimité par la courbe $(\mathcal{C})$, la droite (D) d'équation $y = \dfrac{1}{3}x$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = n$.

1. Justifier que pour tout entier naturel n non nul, $d_n = \displaystyle\int_0^n \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right)\,\mathrm{d}x$.
   On sait que $(\mathcal{C})$ est au-dessus de (D) sur $\mathbb{R}$, donc sur tout intervalle $[0;n]$.
   Alors, l'aire d_n est l'intégrale de la différence des fonctions sur $[0;n]$.

$$\begin{aligned} d_n &= \int_0^n (f(x) - \frac{1}{3}x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^n \ln(1+\mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

2. (a) Justifier que pour tout $x \geqslant 0$, $\ln(1+x) \leqslant x$.
   Indication : on pourra étudier la fonction $g : x \mapsto \ln(1+x) - x$ sur $[0;+\infty[$.
   La fonction g est définie et dérivable sur $[0;+\infty[$, et
   $g'(x) = \cdots = \dfrac{-x}{1+x} \leqslant 0$ pour tout $x \geqslant 0$.

Donc g est décroissante sur $[0;+\infty[$.
De plus, $g(0) = 0$.

x	0 $\qquad$ $+\infty$
$g(x)$	0 $\searrow$

On en déduit que pour tout $x \geqslant 0$, $g(x) \leqslant 0$.
$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } x \geqslant 0,\ \ln(1+x) \leqslant x.}$

(b) En déduire que pour tout réel x, $\ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right) \leqslant \mathrm{e}^{-x}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-x} > 0$.
On peut donc remplacer x par e^{-x} dans l'inégalité de la question précédente.
$\boxed{\text{Pour tout réel } x,\ \ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right) \leqslant \mathrm{e}^{-x}.}$

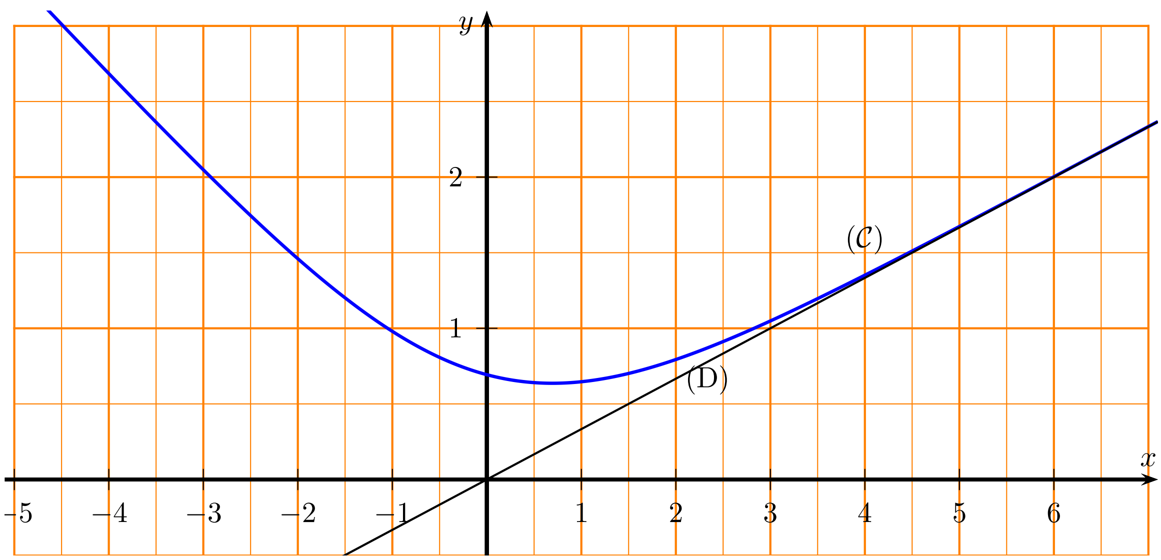
(c) Montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $d_n \leqslant 1$. La suite $(d_n)_{n\geqslant 1}$ est-elle convergente ? Justifier. En passant aux intégrales dans l'inégalité précédente, il vient :

$$\begin{aligned}
\int_0^n \ln(1+\mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{d}x &\leqslant \int_0^n \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\\
d_n &\leqslant \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^n\\
d_n &\leqslant 1-\mathrm{e}^{-n} < 1
\end{aligned}$$

En effet, pour tout entier n on a $-\mathrm{e}^{-n} < 0$, et donc $d_n < 1$.
$\boxed{\text{La suite } (d_n) \text{ est majorée par 1.}}$
Pour monter qu'elle converge, il suffit de montrer qu'elle est croissante.

$$\begin{aligned}
d_{n+1}-d_n &= \int_0^{n+1} \ln(1+\mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{d}x - \int_0^n \ln(1+\mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{d}x\\
&= \int_n^{n+1} \ln(1+\mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{d}x > 0
\end{aligned}$$

En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ln(1+\mathrm{e}^{-x}) > 0$ sur l'intervalle $[n;n+1]$, et par positivité de l'intégrale, $\displaystyle\int_n^{n+1} \ln(1+\mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{d}x > 0$.
Donc pour tout entier n, $d_{n+1} > d_n$.
La suite (d_n) est croissante et majorée par 1.
$\boxed{\text{Donc } (d_n) \text{ est convergente vers un réel } \ell \leqslant 1.}$



Exercice 5 (5 points)
Une grande entreprise dispose d'un vaste réseau informatique. On observe le temps de fonctionnement normal séparant deux pannes informatiques. Ce temps sera appelé ≪ temps de fonctionnement ≫. Soit X la variable aléatoire égale au temps de fonctionnement, exprimé en heures.

On admet que X suit une loi exponentielle de paramètre λ. Le paramètre λ est un réel strictement positif.

On rappelle que, pour tout réel $t \geqslant 0$, $\quad P(X \leqslant t) = \displaystyle\int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx$.

1. On sait que la probabilité que le temps de fonctionnement soit inférieur à 7 heures est égale à 0,6.
   Montrer qu'une valeur approchée de λ à 10^{-3} près est 0,131.
   $P(X < 7) = 1 - e^{-7\lambda} = 0,6$,
   donc $e^{-7\lambda} = 0,4$,
   $\boxed{\lambda = -\dfrac{\ln 0,4}{7} \approx 0,131.}$

   Dans les questions suivantes, on prendra 0,131 pour valeur approchée de λ et les résultats seront donnés à 10^{-2} près .
2. Montrer qu'une valeur approchée de la probabilité que le temps de fonctionnement soit supérieur à 5 heures est égale à 0,52.
   $\boxed{P(X > 5) = e^{-5\lambda} \approx 0,52.}$
3. Calculer la probabilité que le temps de fonctionnement soit supérieur à 9 heures sachant qu'il n'y a pas eu de panne au cours des quatre premières heures.
   La loi exonentielle étant sans mémoire (ou sans vieillissement),
   $\boxed{P_{X>4}(X > 9) = P(X > 5) \approx 0,52.}$
4. Calculer la probabilité que le temps de fonctionnement soit compris entre 6 et 10 heures.
   $\boxed{P(6 < X < 10) = e^{-6\lambda} - e^{-10\lambda} \approx 0,19.}$
5. Quel est le temps de fonctionnement moyen ? (on pourra arrondir à l'heure près).
   $E(X) = \dfrac{1}{\lambda} \approx 7,6.$
   $\boxed{\text{Le temps de fonctionnement moyen est de 8 heures environ.}}$
6. On relève aléatoirement huit temps de fonctionnement, qu'on suppose indépendants. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de relevés correspondant à des temps de fonctionnement supérieurs ou égaux à 5 heures.
   (a) Quelle est la loi suivie par Y ?
   On rép'ete de façon indépendante 8 épreuves de Bernoulli de même paramètre $p = P(X > 5) \approx 0,52$.
   La variable aléatoire Y qui correspond au nombre de "succès" suit la loi binomiale $\mathcal{B}(8; 0,52)$.
   (b) Calculer la probabilité que trois temps parmi ces huit soient supérieurs ou égaux à 5 heures.
   $\boxed{P(Y = 3) = \binom{8}{3} p^3 (1-p)^{8-3} = 56 \times 0,52^3 \times 0,48^5 \ approx 0,2}$
   (c) Calculer l'espérance mathématique de Y (on arrondira à l'entier le plus proche). Interpréter.
   $E(Y) = np = 8 \times 0,52 = 4,16.$
   $\boxed{\text{En moyenne, sur les huit relevés, il y a un pleu pus de 4 qui ont une durée supérieure à 5 heures.}}$
7. On relève désormais un certain nombre de temps de fonctionnement. On suppose que les relevés sont indépendants.

(a) Écrire un algorithme qui a pour but de déterminer le nombre minimal n_0 de relevés à effectuer pour que la probabilité de ne trouver aucun temps de fonctionnement supérieur ou égal à 5 heures soit inférieure ou égale à 0,001.
L'algorithme pourra être écrit en langage courant ou en langage calculatrice.
Désormais, Y suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n; 0,52.)$
On cherche la plus petite valeur de n telle que $P(Y = 0) \leqslant 0,001$.
Or, $P(Y = 0) = 0,48^n$.
Algorithme :

DÉBUT
n prend la valeur 1.
Tant que $0,48^n > 0,001$
n prend la valeur $n+1$
Fin tant que
Afficher n
FIN

(b) Programmer cet algorithme à la calculatrice et donner la valeur de n_0.
$\boxed{n_0 = 10}$

(c) Le directeur de l'entreprise affirme :
≪ On connaît donc le nombre minimal de relevés à effectuer pour obtenir au moins un temps de fonctionnement supérieur ou égal à 5 heures, avec une probabilité supérieure ou égale à 0,999 ≫.
A-t-il raison ? Argumenter la réponse.
$P(Y = 0) \leqslant 0,001$ équivaut à $1 - P(Y = 0) \geqslant 0,999$, c'est-à-dire $P(Y \geqslant 1) \geqslant 0,999$.
Oui, le directeur a raison, le nombre minimal de relevés à effectuer est 10.