

Chapitre 4 : Trigonométrie

I Le cercle trigonométrique

Remarque

L'ensemble des nombres entiers relatifs (positifs ou négatifs) se note \mathbb{Z} .
 $\mathbb{Z} = \{\dots; -2; -1; 0; 1; 2; \dots\}$.

On se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

On note I et J les points tels que $\vec{OI} = \vec{i}$ et $\vec{OJ} = \vec{j}$.

Définition

Le cercle trigonométrique est le cercle de centre O et de rayon 1, pour lequel on a choisi pour sens direct le sens inverse des aiguilles d'une montre.

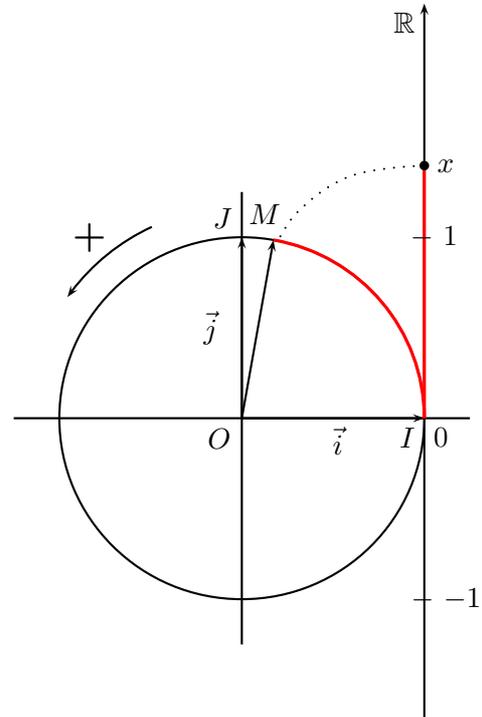
On enroule l'axe gradué des nombres réels sur le cercle en plaçant l'origine des réels en I .

Alors, à tout nombre réel x correspond un unique point M sur le cercle.

On dit que M est l'image de x sur le cercle.

Remarque

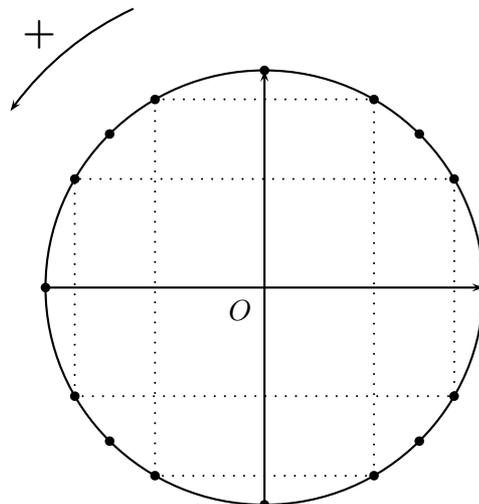
Le cercle trigonométrique a pour rayon 1, son périmètre est donc 2π .



Exercice 1

Placer les images des réels suivants sur le cercle trigonométrique :

- $0, \pi, 2\pi, 3\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, -\pi, -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}$.
- $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}$.



Propriété

Deux nombres réels ont la même image sur le cercle trigonométrique ssi leur différence est un multiple de 2π . Les réels x et x' ont la même image ssi il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - x' = k \times 2\pi$.

Exercice 2

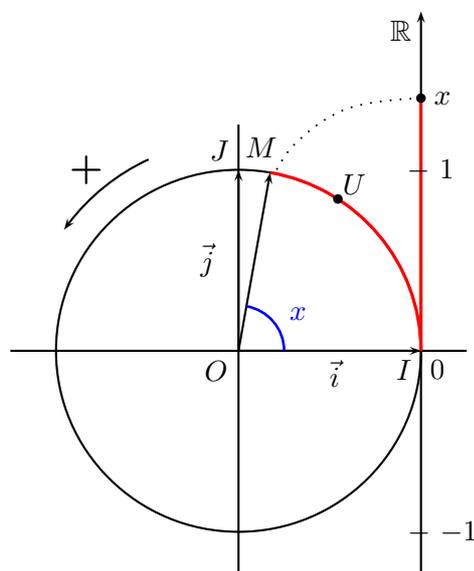
Les réels suivants ont-ils la même image sur le cercle ?

1. $a = 13\pi$ et $b = 4\pi$.
2. $a = \frac{5\pi}{4}$ et $b = \frac{-19\pi}{4}$.

Définition

Soit U l'image du nombre 1 sur le cercle trigonométrique.

Un radian est la mesure de l'angle géométrique \widehat{IOU} interceptant un arc de cercle de longueur 1 sur le cercle trigonométrique.

**Remarque**

1. Lorsque $x \in [0; \pi]$, la longueur x de l'arc de cercle \widehat{OM} correspond à la mesure en radian de l'angle \widehat{IOM} .
2. Correspondance degré - radian

degrés	360	180	90	60	45	30	20
radians	2π	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{9}$

II Trigonométrie

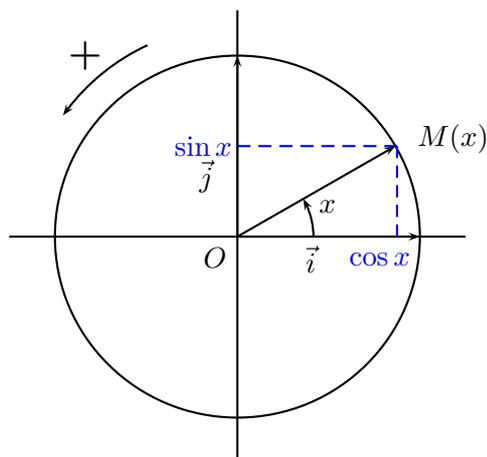
II.1 Cosinus et sinus d'un réel

Définition

Soit $x \in \mathbb{R}$. Notons $M(x)$ l'image de x sur le cercle trigonométrique.

Le cosinus de x est l'abscisse de M dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$. On le note $\cos x$.

Le sinus de x est l'ordonnée de M dans $(O; \vec{i}; \vec{j})$. On le note $\sin x$.



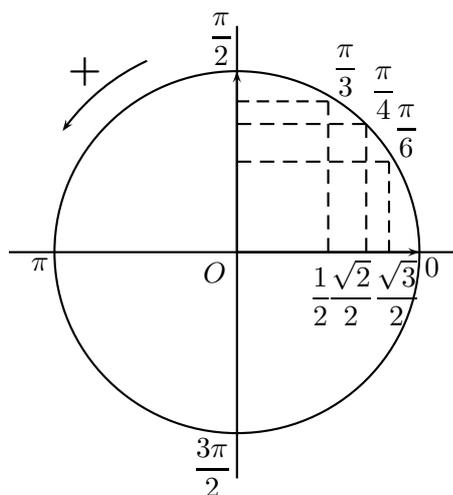
Propriété (Conséquences immédiates)

Pour tout x réel, on a :

- $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$.
- Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$.
- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

Propriété (valeurs remarquables)

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0



Démonstration

On démontre $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, et $\cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

— Cosinus et sinus de $\frac{\pi}{3}$ Soit A l'image de $\frac{\pi}{3}$ sur le cercle trigonométrique.

Le triangle IOA est isocèle en O et l'angle \widehat{IOA} mesure $\frac{\pi}{3}$ (60 degrés).

Par sommes des angles, les angles à la base mesurent aussi $\frac{\pi}{3}$.

Le triangle OIA est donc équilatéral.

Les hauteurs sont donc aussi des médianes dans ce triangle.

Le pied H de la hauteur issue de A est donc le milieu de $[OI]$, et $OH = \frac{1}{2}$.

On a donc $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

Ensuite, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

Donc $\sin^2 \frac{\pi}{3} = 1 - \cos^2 \frac{\pi}{3} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

Donc $\sin \frac{\pi}{3} = \sqrt{\frac{3}{4}}$ ou $\sin \frac{\pi}{3} = -\sqrt{\frac{3}{4}}$.

Comme $0 \leq \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{2}$, $\sin \frac{\pi}{3} \geq 0$.

$$\text{Donc } \sin \frac{\pi}{3} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

— Cosinus et sinus de $\frac{\pi}{4}$

Soit B l'image de $\frac{\pi}{4}$ sur le cercle, et H le pied de la hauteur issue de B dans IOB . Le triangle OBH est rectangle isocèle en H .

Le caractère isocèle se traduit par $HO = HB$, soit $\cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4}$.

D'après le théorème de Pythagore, $HO^2 + HB^2 = 1$, soit $2 \cos^2 \frac{\pi}{4} = 1$.

$$\cos^2 \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}.$$

$$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } \cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Or, $\cos \frac{\pi}{4} > 0$ car $0 < \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$.

$$\text{Donc } \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

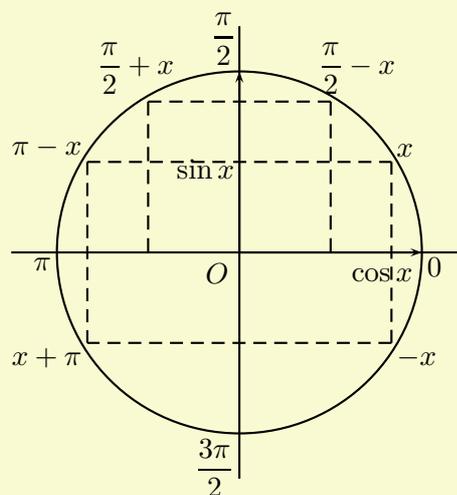
Comme $\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4}$, il vient aussi $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. □

III Compléments : angles associés

Théorème

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \cos(-x) &= \cos(x) \\ \sin(-x) &= -\sin(x) \\ \cos(x + \pi) &= -\cos(x) \\ \sin(x + \pi) &= -\sin(x) \\ \cos(\pi - x) &= -\cos(x) \\ \sin(\pi - x) &= \sin(x) \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \sin(x) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \cos(x) \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= -\sin(x) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= \cos(x) \end{aligned}$$



Exercice 3

1. cos et sin, angles associés

[ressource 35](#)

[ressource 19](#)

[ressource 1126](#)

2. mesure principale :

[ressource 251](#)

[ressource 568](#)

[ressource 567](#)

