

Vecteurs, droites et plans de l'espace

I Vecteurs de l'espace

On étend à l'espace la notion de vecteur.

Définition (translation)

Soient A et B deux points distincts de l'espace.

La translation qui transforme A en B est appelée translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Rappels

1. Un vecteur non nul $\overrightarrow{AB}$ est caractérisé par 3 informations :
 - sa **direction** : celle de la droite (AB) ,
 - son **sens** : de A vers B ,
 - sa **norme** : la longueur AB .
2. La translation qui laisse M en M est la translation de vecteur $\overrightarrow{MM}$, appelé **vecteur nul**, et noté $\vec{0}$.
3. **Vecteurs égaux** :
 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$
 $\Leftrightarrow$ la translation qui envoie A en B envoie C en D
 $\Leftrightarrow ABCD$ est un parallélogramme (éventuellement aplati).
4. **Relation de Chasles**
Pour tous points A , B et C de l'espace, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
5. **Règle du parallélogramme**
 $ABCD$ est un parallélogramme ssi $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$.
6. Vecteur $k\vec{u}$.
 $\|k\vec{u}\| = |k| \times \|\vec{u}\|$.
Pour $\vec{u} \neq \vec{0}$, si $k > 0$ alors les vecteurs $\vec{u}$ et $k\vec{u}$ sont de même sens.
Si $k < 0$, alors $\vec{u}$ et $k\vec{u}$ sont de sens contraire.
7. Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** s'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.
Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.

Propriété (règles de calcul, admises)

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs de l'espace, k et k' sont des nombres réels.

1. $k\vec{u} = \vec{0}$ ssi ($k = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$)
2. $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$
3. $(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$
4. $k(k'\vec{u}) = (kk')\vec{u}$

Définition (combinaison linéaire)

On dit qu'un vecteur $\vec{T}$ est une **combinaison linéaire** des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ s'il existe des réels x , y , et z tels que :

$$\vec{T} = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}$$

II Droites de l'espace

Définition (vecteur directeur d'une droite)

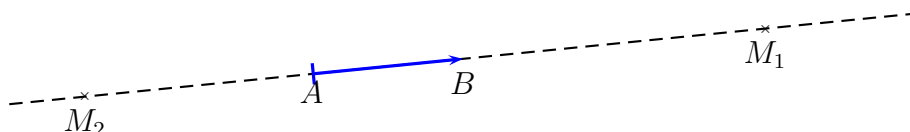
Un vecteur non nul $\vec{u}$ dirige la droite d s'il existe deux points distincts A et B de d tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

Propriété (Caractérisation d'une droite)

Soient A et B deux points distincts de l'espace.

La droite (AB) est l'ensemble des points M pour lesquels il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$$



Remarque

Une droite de l'espace est entièrement déterminée par la donnée d'un point et d'un vecteur directeur.

Propriété (alignement et parallélisme)

1. Les points A , B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
2. Les droites (AB) et (CD) sont parallèles ($A \neq B$ et $C \neq D$) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

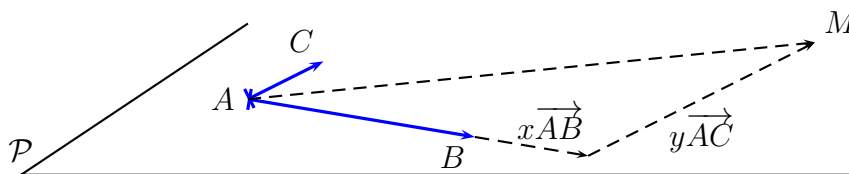
III Plans de l'espace

Propriété

Soient A , B et C trois points non alignés.

Le plan (ABC) est l'ensemble des points M pour lesquels il existe des réels x et y tels que

$$\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}.$$



Remarque

Pour définir un plan, il suffit de donner :

- trois points non alignés A , B et C ,
- ou un point A et deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires.

On dit alors que $(\vec{u}; \vec{v})$ est un couple de vecteurs directeurs du plan et qu'il définit sa direction.

On peut alors noter le plan $(A; \vec{u}; \vec{v})$.

Un point M de l'espace appartient au plan $(A; \vec{u}; \vec{v})$ ssi il existe des réels x et y tels que $\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$.

Définition (vecteurs coplanaires)

Des vecteurs sont **coplanaires** si et seulement si leurs représentants, de même origine A , ont leurs extrémités dans un même plan passant par A .

Remarque

Trois points sont toujours coplanaires.

Deux vecteurs sont toujours coplanaires.

Propriété (méthode utile en exercice)

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires.

Alors les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si il existe des réels x et y tels que

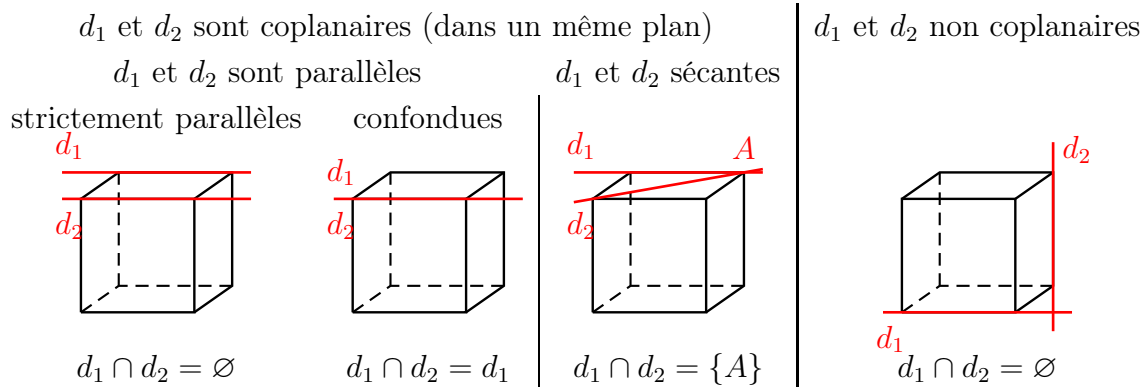
$$\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}.$$

IV Positions relatives de droites et plans de l'espace

IV.1 Positions relatives de deux droites

Propriété

Deux droites de l'espace sont soit coplanaires, soit non coplanaires.



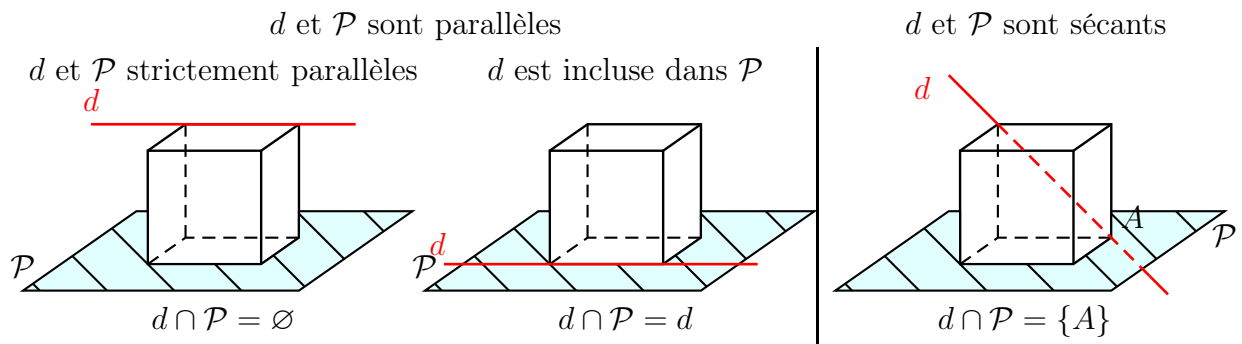
IV.2 Positions relatives d'une droite et d'un plan

Définition

Une droite est parallèle à un plan si elle est parallèle à une droite de ce plan.

Propriété

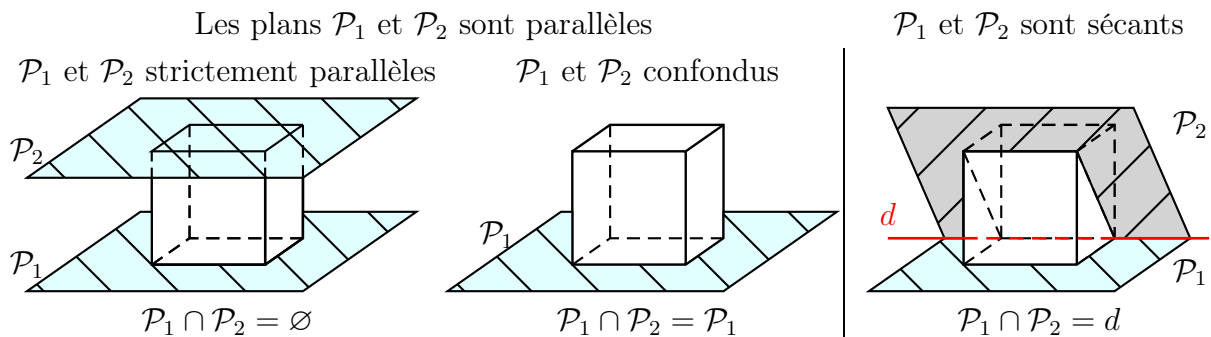
Une droite et un plan de l'espace sont soit parallèles, soit sécants.



IV.3 Positions relatives de deux plans

Propriété

Deux plans de l'espace sont soit parallèles, soit sécants.



Exercice 1

Soit un cube $ABCDEFGH$. On note J le centre de la face $(BCGF)$, K le centre de la face $(CDHG)$, et I le milieu de $[AB]$. Étudier les positions relatives des droites :

- (KJ) et (DB)
- (AE) et (IF)
- (AB) et (FC)

