Chapitre 5 : Suites numériques

I Généralités sur les suites

Définition
Une suite numérique (on dit aussi une suite réelle) est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.
Notation : $(u_n) \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & u_n \end{array}$.
Le nombre réel u_n est appelé terme d'indice n de la suite (u_n).

Remarque (importante)
Il y a notamment deux façons de définir une suite réelle :

Par son terme général : il y a une formule qui donne u_n en fonction de n : $u_n = f(n)$.
Exemple : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2$.
Alors, $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = 4$, $u_3 = 9$ etc.

Par récurrence : il y a une formule qui permet de passer d'un terme de la suite au terme suivant. Autrement dit, on a relation du type $u_{n+1} = f(u_n)$.
Il suffit de donner alors la valeur du premier terme pour que la suite soit entièrement définie.
Exemple : On donne $u_0 = 3$ et la relation $u_{n+1} = u_n - 2$.
Alors, $u_1 = u_0 - 2 = 3 - 2 = 1$, $u_2 = 1 - 2 = -1$, $u_3 = -3$, $u_4 = -5$ etc.

Dans tous les cas, la suite peut être définie seulement à partir d'un certain rang n_0.
Par exemple, la suite (u_n) de terme général $u_n = \sqrt{n - \pi}$ est définie pour $n \geqslant 4$.

I.1 Calcul de termes à la calculatrice

Pour une suite définie par son terme général, on peut utiliser le mode fonction et la table ajustée sur des entiers.
Le mode suite est surtout intéressant pour les suites définies par récurrence.

Calculatrice TI.
On passe en `mode`, `suite`.
Pour définir la suite, on va dans $\boxed{f(x)}$.
$nMin$ est l'indice du premier terme : 0 si le premier terme est u_0.
$u(n)$: expression qui peut dépendre de n, et/ou du terme précédent $u(n-1)$.
$u(nMin)$ est le premier terme (on ne met rien pour une suite définie par son terme général).
On affiche le tableau de valeurs dans `table` (éventuellement à paramétrer via `deftable`)
Calculatrice Casio.

II Algorithmes de calcul de terme et de somme de termes

II.1 Algorithme de calcul de terme d'une suite récurrente

Exercice 1
Écrire un algorithme qui renvoie le nombre u_n lorsque l'on entre l'entier n.
$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = 2u_n + 6 \end{cases}$$

Programme Termsuit

```
Entrer N
5 → U
Pour K allant de 1 à N
     2U+6 → U
FinPour
Afficher U
```

Programme CASIO

```
"N=" ?→ N
5 → U
For 1 → K to N
2U+6 → U
Next
U ◢
```

Programme TEXAS

```
Prompt N
5 → U
For (K,1,N)
2U+6 → U
End
Disp U
```

On obtient par exemple $u_{10} = 11258$.

II.2 Algorithme de calcul de la somme des termes consécutifs d'une suite

Exercice 2

On reprend la suite précédente : $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = 2u_n + 6 \end{cases}$

On cherche cette fois à obtenir $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ pour un entier n donné en entrée ($n \geqslant 1$).

Programme Somsuite

```
Entrer N
5 → U
U → S
Pour K allant de 1 à N
     2U+6 → U
     S+U → S
FinPour
Afficher S
```

On obtient $S_{10} = 22451$.

Exercice 3 (variantes)

Écrire un algorithme qui renvoie la somme S_n des premiers termes jusqu'à u_n.

1. Pour tout entier naturel n, $u_n = 2 + 5n$.

   Pour tout $n \geqslant 0$, on pose $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

   ```
   Entrer N
   2 → S (car u0 = 2, et donc S0 = 2).
   Pour K allant de 1 à N
        2+5k → U
        S+U → S
   FinPour
   Afficher S
   ```

2. $\begin{cases} u_3 = -1 \\ \text{Pour tout } n \geqslant 3, u_{n+1} = -2u_n + 6 \end{cases}$

   On cherche à obtenir $S_n = u_3 + u_4 + \cdots + u_n = \sum_{k=3}^{n} u_k$ pour un entier n donné en entrée ($n \geqslant 4$).

III Suites arithmétiques

Définition
Une suite (u_n) est arithmétique si chaque terme s'obtient en ajoutant au précédent un même nombre r. Le nombre r est appelé la raison de la suite arithmétique.
On a donc la relation suivante :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r$$

Exemple : 4 ; 7 ; 10 ; 13 ; 16 ; 19 sont les premiers termes de la suite (u_n) définie par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = u_n + 3$. La raison de cette suite arithmétique est donc 3.

Exercice 4
Chercher le 4$^{\text{e}}$ terme de la suite arithmétique (u_n) de raison -7 et de premier terme $u_0 = 10$.

Remarque
Une suite (u_n) est arithmétique ssi $u_{n+1} - u_n$ est constant.
Pour étudier si une suite (u_n) est arithmétique, on peut étudier si $u_{n+1} - u_n$ est constant.

Théorème (Terme général d'une suite arithmétique de raison r)
Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et de raison r.
Alors, pour tout entier naturel n, on a $u_n = u_0 + nr$.
Si (u_n) a pour premier terme u_1, alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_1 + (n-1)r$.

Remarque
On a aussi une formule pour exprimer u_n à partir d'une terme u_p quelconque :
Pour tous entiers naturels n et p, $u_n = u_p + (n-p) \times r$.

Exercice 5
La suite arithmétique (u_n) est définie par $u_0 = 6$ et $r = -\dfrac{1}{2}$. Calculer u_{2012}.

Remarque
Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

1. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.
   (u_n) est croissante ssi $r \geqslant 0$, et décroissante ssi $r \leqslant 0$.
2. Une suite arithmétique est représentée graphiquement par des points alignés.
   C'est la restriction à $\mathbb{N}$ d'une fonction affine.

Propriété (Somme des n premiers nombres entiers naturels)
Pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Démonstration
$S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n$
$S_n = n + n - 1 + n - 2 + \cdots + 2 + 1$
En additionnant membre à membre, il vient
$2 \times S_n = (1+n) + (2+n-1) + \cdots + (n-1+2) + (n+1)$
$2 \times S_n = n \times (n+1)$, donc $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. □

Théorème (Somme des premiers termes d'une suite arithmétique)
Soit (u_n) une suite arithmétique.

1. Si le premier terme est u_0, alors pour tout entier $n \geqslant 0$:
$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} + u_n = \frac{u_0 + u_n}{2} \times (n+1)$$
2. En partant de u_1, on a pour tout $n \geqslant 1$,
$$u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} + u_n = \frac{u_1 + u_n}{2} \times n$$
3. De façon générale, pour la somme des termes consécutifs :
$$S = \frac{(\text{premier terme } + \text{ dernier terme})}{2} \times (\text{nombre de termes})$$

Démonstration

$$\begin{array}{rcl} u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} + u_n & = & u_0 + (u_0 + r) + (u_0 + 2r) + \cdots + (u_0 + nr) \\ & = & (n+1)u_o + r(1 + 2 + \cdots + n) \\ & = & (n+1)u_0 + \dfrac{rn(n+1)}{2} \\ & = & (n+1)\dfrac{2u_0 + nr}{2} \\ & = & (n+1)\dfrac{u_0 + (u_0 + nr)}{2} \\ & = & \dfrac{u_0 + u_n}{2} \times (n+1) \end{array}$$

Remarque (utile pour des calculs de sommes arithmétiques)
Soit $a + \cdots + A$ une somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison $r > 0$.
Alors, la somme contient $\dfrac{A-a}{r} + 1$ termes.

Exercice 6

1. Calculs de termes d'une suite arithmétique :
   ressource 26
   ressource 1275
   ressource 1276
2. Terme général d'une suite arithmétique :
   ressource 29
   ressource 1278
   ressource 1279
3. Somme des premiers termes consécutifs : ressource 1298
4. Somme de termes consécutifs : ressource 1299

IV Suites géométriques

Définition
Une suite géométrique est une suite où chaque terme s'obtient en multipliant le précédent par un même nombre non nul q appelé la raison.

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n \times q$$

Exemple : 1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16 ; 32 sont les premiers termes de la suite géométrique de raison 2 et de premier terme 1 (ce sont les puissances successives de 2).

Remarque
1. Si $q > 0$, les termes de la suite (u_n) sont tous de même signe (le signe du premier terme).
2. Si $q < 0$, les signes des termes de la suite alternent.

Théorème (Terme général d'une suite géométrique)
Soit (u_n) la suite géométrique de raison q.
1. Si le premier terme est u_0, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n = u_0 \times q^n$.
2. Si le premier terme de la suite est u_1, alors pour tout $n \geqslant 1$, $\quad u_n = u_1 \times q^{n-1}$.

Remarque
À partir d'un terme u_p quelconque,

$$u_n = u_p \times q^{n-p}$$

Exercice 7
Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 9$ et de raison $q = -\dfrac{1}{3}$. Calculer u_5.

Théorème (Somme des premières puissances entières d'un nombre)
Soient q un nombre réel et n un nombre entier, $n \geqslant 1$.
1. Si $q \neq 1$ alors $1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n-1} + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.
2. Si $q = 1$, alors $1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n-1} + q^n = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{\text{somme de } n+1 \text{ termes}} = n + 1$.

Démonstration
1. On suppose $q \neq 1$. Notons $S = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} + q^n$.
   Si on multiplie cette égalité par q, on obtient $qS = q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n + q^{n+1}$.
   En soustrayant membre à membre ces deux égalités, il vient :
   $$S - qS = 1 - q^{n+1}$$
   $$S(1 - q) = 1 - q^{n+1}$$
   Ainsi (on peut diviser puisqu'on suppose $q \neq 1$), $S = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.
2. Evident.

Théorème (Somme des premiers termes d'une suite géométrique)
Soit (u_n) une suite géométrique de raison q. On suppose $q \neq 1$.

1. Si le premier terme est u_0, alors $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} + u_n = u_0 \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.
2. Si le premier terme est u_1, alors $u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} + u_n = u_1 \dfrac{1-q^{n}}{1-q}$.

On retiendra :
$$S = (\text{premier terme}) \frac{1 - (\text{raison})^{(\text{nombre de termes})}}{1 - \text{raison}}$$

Application :
Calculer $S = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 256$.
$S = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^8 = \dfrac{1-2^9}{1-2} = \dfrac{1-512}{-1} = 511$.

Exercice 8

1. Calculs de termes d'une suite éométrique :
   ressource 2501
   ressource 2503
   ressource 2504
2. Terme général d'une suite géométrique :
   ressource 2506
   ressource 2507
3. Somme des premiers termes d'une suite géométrique : ressource 2534
4. Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique : ressource 2535 ressource 3844
5. Lecture graphique du premier terme et de la raison :
   ressource 3846 ressource 3845

V Le symbole sigma Σ

Théorème (linéarité de la somme)
Soient $x_0, x_1, \ldots, x_n$ $(n+1)$ nombres réels. Soient a et b des réels. alors,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n} (ax_i + b) &= \sum_{i=0}^{n} ax_i + \sum_{i=0}^{n} b \\ &= a \sum_{i=0}^{n} x_i + (n+1) \times b \end{aligned}$$

VI Pourquoi suites « arithmétiques », et « géométriques » ?

Si (u_n) est une suite arithmétique, lorsqu'on considère 3 termes consécutifs quelconques, u_{n-1}, u_n et u_{n+1}, le terme central est la moyenne arithmétique des deux termes qui l'encadrent.

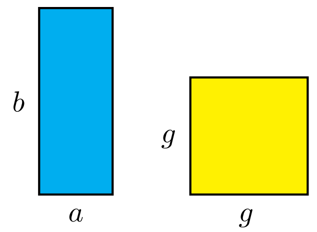
$$u_n = \frac{u_{n-1} + u_{n+1}}{2}$$

Si (u_n) est une suite géométrique, lorsqu'on considère 3 termes consécutifs quelconques, u_{n-1}, u_n et u_{n+1}, le terme central est la moyenne géométrique des deux termes qui l'encadrent.

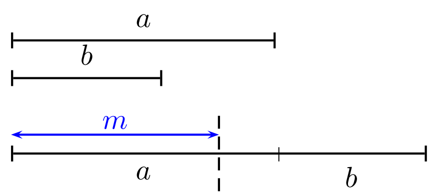
$$u_n \quad = \quad \sqrt{u_{n-1} \times u_{n+1}}$$

VI.1 Moyennes arithmétique et géométrique de deux nombres

Soient a et b deux nombres réels. La moyenne arithmétique de a et de b est $m = \dfrac{a+b}{2}$
La moyenne géométrique de deux nombres positifs a et b est $g = \sqrt{ab}$.
Le carré de côté g a la même aire que le rectangle de dimensions a et b (d'où moyenne « géométrique »).
En effet, $g^2 = ab$.

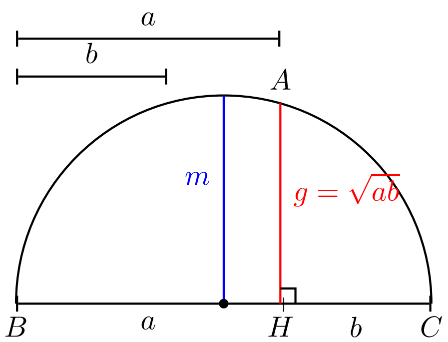


VI.2 Construction de la moyenne arithmétique à la règle et au compas



Pour la moyenne arithmétique, il suffit de tracer la médiatrice du segment de longueur $a+b$ pour diviser la longueur $a+b$ en deux parties égales. $m = \dfrac{a+b}{2}$.

VI.3 Construction de la moyenne géométrique à la règle et au compas



On trace le cercle de diamètre $[BC]$, $(BC = a+b)$. Le point A est sur le cercle, et donc ABC est rectangle en A.

Alors, la hauteur AH du triangle rectangle ABC est la moyenne géométrique de a et b. $a = BH$, et $b = CH$. Pour montrer que $AH = \sqrt{BH \times CH}$, on montre que $AH^2 = BH \times CH$ (équivalent).

$$\begin{array}{rcl}
AH^2 & = & \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AH} \\
 & = & (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BH}) \cdot (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CH}) \\
 & = & \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CH} + \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CH} \\
 & = & 0 + \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{CH} + \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CH} \\
 & = & BH \times CH + BH \times CH - BH \times CH \\
 & = & BH \times CH \\
AH^2 & = & ab \\
AH & = & \sqrt{ab}
\end{array}$$

Remarque
La figure précédente permet de visualiser le fait que la moyenne géométrique est toujours inférieure ou égale à la moyenne arithmétique ($g \leqslant m$) et que $g = m$ uniquement lorsque $a = b$.