BTS. Correction du DS8

Exercice 1 (5 points)

Compléter sur l'énoncé.

1. Pour chaque nombre complexe donné sous forme algébrique $a + \mathrm{i}b$ avec a et b réels, préciser la partie réelle a et la partie imaginaire b.
   $5 - 8\mathrm{i}$. $a = 5$ et $b = -8$
   $\dfrac{5-9\mathrm{i}}{10}$. $a = 0,5$ et $b = -0,9$
   -4. $a = -4$ et $b = 0$
   $11\mathrm{i}\sqrt{3}$. $a = 0$ et $b = 11\sqrt{3}$.
2. Le conjugué de $-1 - 6\mathrm{i}$ est $-1 + 6\mathrm{i}$.
3. $(2 - 3\mathrm{i})(2 + 3\mathrm{i}) = 2^2 + 3^2 = 13$
4. Soit l'équation $az^2 + bz + c = 0$, avec a, b et c réels, $a \neq 0$.
   Le discriminant de l'équation est $\Delta = b^2 - 4ac$.
   (a) Si $\Delta > 0$, l'équation a deux solutions réelles distinctes :
   $$z_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.$$
   (b) Si $\Delta = 0$, l'équation a une solution double réelle $z_0 = \dfrac{-b}{2a}$.
   (c) Si $\Delta < 0$, l'équation admet deux solutions complexes conjuguées distinctes (non réelles) :
   $$z_1 = \frac{-b-\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b+\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

Exercice 2 (4 points)

On pose $z_1 = 3 - 2\mathrm{i}$, et $z_2 = 1 + 5\mathrm{i}$.
Calculer et donner le résutat sous forme algébrique :

1. $A = z_1 + z_2$
   $A = 3 - 2\mathrm{i} + 1 + 5\mathrm{i} = 4 + 3\mathrm{i}$
2. $B = 2\mathrm{i} \times z_1 - z_2 = 2\mathrm{i}(3 - 2\mathrm{i}) - (1 + 5\mathrm{i}) = 6\mathrm{i} + 4 - 1 - 5\mathrm{i} = 3 + \mathrm{i}$
3. $C = z_1 \times z_2 = (3 - 2\mathrm{i})(1 + 5\mathrm{i}) = 3 + 15\mathrm{i} - 2\mathrm{i} + 10 = 13 + 13\mathrm{i}$
4. $D = \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{3-2\mathrm{i}}{1+5\mathrm{i}} = \dfrac{(3-2\mathrm{i})(1-5\mathrm{i})}{(1+5\mathrm{i})(1-5\mathrm{i})}$
   $D = \dfrac{3-15\mathrm{i}-2\mathrm{i}-10}{1^2+5^2} = \dfrac{-7-17\mathrm{i}}{26}$

Exercice 3 (5 points)

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations, et donner la solution sous forme algébrique.

1. $(2 - 3\mathrm{i})z = 4 + 5\mathrm{i}$
   $z = \dfrac{4+5\mathrm{i}}{2-3\mathrm{i}} = \dfrac{(4+5\mathrm{i})(2+3\mathrm{i})}{(2-3\mathrm{i})(2+3\mathrm{i})} = \dfrac{8+12\mathrm{i}+10\mathrm{i}-15}{2^2+3^2} = \dfrac{-7}{13} + \dfrac{22}{13}\mathrm{i}$
2. $(1 + 7\mathrm{i})\overline{z} = 2\mathrm{i}$
   $\overline{z} = \dfrac{2\mathrm{i}}{1+7\mathrm{i}} = \dfrac{2\mathrm{i}(1-7\mathrm{i})}{1^2+7^2} = \dfrac{2\mathrm{i}+14}{50} = \dfrac{7}{25} + \dfrac{1}{25}\mathrm{i}.$
   Donc $z = \dfrac{7}{25} - \dfrac{1}{25}\mathrm{i}.$
3. $4 - \mathrm{i}z = -3z + 7\mathrm{i}$
   $(3 - \mathrm{i})z = -4 + 7\mathrm{i}$ ssi $z = \dfrac{(-4+7\mathrm{i})(3+\mathrm{i})}{(3-\mathrm{i})(3+\mathrm{i})} = \dfrac{-12-4\mathrm{i}+21\mathrm{i}-7}{3^2+1^1}.$
   ssi $z = \dfrac{-19+17\mathrm{i}}{10} = -1,9 + 1,7\mathrm{i}$

Exercice 4 (6 points)

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

1. $6z^2 - 11z + 5 = 0$
   $\Delta = b^2 - 4ac = (-11)^2 - 4 \times 6 \times 5 = 121 - 120 = 1 > 0.$
   $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{11-1}{12} = \dfrac{5}{6}.$ $\qquad x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{11+1}{12} = 1.$
   Les solutions sont 1 et $\dfrac{5}{6}$.
2. $3z^2 + 4 = 0$
   $\Delta = b^2 - 4ac = -4 \times 3 \times 4 = -48 < 0.$
   $z_1 = \dfrac{-b-\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a} = -\dfrac{\mathrm{i}\sqrt{48}}{6} = -\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\mathrm{i}.$ $\quad z_2 = \dfrac{-b+\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\mathrm{i}.$
   Il y a deux solutions qui sont $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\mathrm{i}$ et $-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\mathrm{i}$.
3. $\dfrac{1}{9}z^2 - \dfrac{2}{3}z + 1 = 0$
   $\Delta = b^2 - 4ac = \left(-\dfrac{2}{3}\right)^2 - 4 \times \dfrac{1}{9} \times 1 = 0.$
   $x_0 = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{9}{2} = 3$
   Il y a une solution qui est 3.
4. $r^2 = r - 8$
   $r^2 - r + 8 = 0.$
   $\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 \times 8 = 1 - 32 = -31 < 0.$
   $z_1 = \dfrac{-b-\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a} = \dfrac{1-\mathrm{i}\sqrt{31}}{2}$ $\qquad z_2 = \dfrac{-b+\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a} = \dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{31}}{2}$
   Il y a deux solutions qui sont $\dfrac{1-\mathrm{i}\sqrt{31}}{2}$ et $\dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{31}}{2}$.