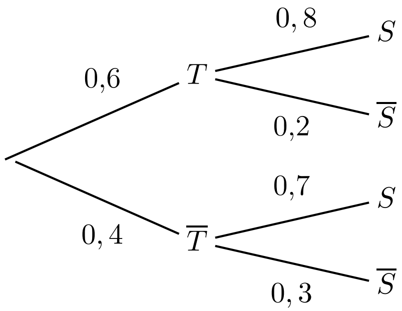
1re G. Correction du devoir n° 2

Sujet 1

Exercice 1 (3 points)

On a représenté une expérience aléatoire par l'arbre pondéré ci-dessous.



1. Donner sans justification les probabilités suivantes :
   $P(T)$; $P_{\overline{T}}(\overline{S})$; $P_{\overline{T}}(S)$
   $\boxed{P(T) = 0,6\,;\ P_{\overline{T}}(\overline{S}) = 0,3\,;\ P_{\overline{T}}(S) = 0,7}$
2. Montrer que $P(S) = 0,76$.
   T et $\overline{T}$ forment une partition de l'univers, d'après la formule des probabilités totales,
   $P(S) = P(T \cap S) + P(\overline{T} \cap S)$
   $P(S) = P(T) \times P_T(S) + P(\overline{T}) \times P_{\overline{T}}(S)$
   $P(S) = 0,6 \times 0,8 + 0,4 \times 0,7 = 0,48 + 0,28 = 0,76$.
3. Déterminer, en justifiant, la probabilité conditionnelle $P_S(T)$.
   $P_S(T) = \dfrac{P(T \cap S)}{P(S)} = \dfrac{0,48}{0,76} = \dfrac{12}{19}$

Exercice 2 (2 points)

Les données sont celles du tableau de probabilités ci-dessous où A et B sont deux événements d'une expérience alétoire.

	A	$\overline{A}$	Total
B	0,32	0,32	0,64
$\overline{B}$	0,16	0,2	0,36
Total	0,48	0,52	1

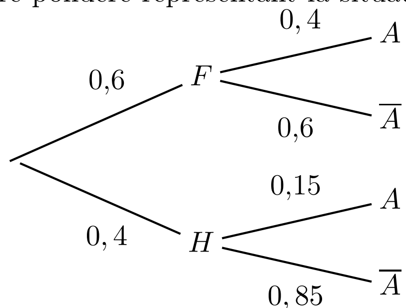
Donner sans justification : $P(\overline{B})$; $P(A)$; $P(A \cap B)$; $P_A(B)$; $P(A \cup B)$.
$P(\overline{B}) = 0,36$, $P(A) = 0,48$; $P(A \cap B) = 0,32$;
$P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{0,32}{0,48} = \dfrac{2}{3}$
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,48 + 0,64 - 0,32 = 0,8$.

Exercice 3 (5 points)

Une salle de sport ouvre dans une commune composée de 9000 femmes et 6000 hommes. Un sondage montre que 40% des femmes sont prêtes à prendre un abonnement, contre seulement 15% des hommes. On rencontre au hasard un habitant de la commune. On note :

— F : "la personne est une femme",
— H : "la personne est un homme",
— A : " le personne est prête à prendre un abonnement".

1. Montrer que $P(F) = 0,6$.
   Il y a équiprobabilité.
   $P(F) = \dfrac{nb\ cas\ favorables}{nb\ cas\ total} = \dfrac{9000}{9000 + 6000} = \dfrac{9}{15} = \dfrac{3}{5} = 0,6$.
2. Contruire un arbre pondéré représentant la situation.



3. Traduite par une phrase l'évènement $F \cap A$, puis calculer sa probabilité.
   $F \cap A$: "La personne est une femme et est prête à s'abonner".
   $P(F \cap A) = P(F) \times P_F(A) = 0,6 \times 0,4 = 0,24$.
4. Calculer la probabilité que la personne soit un homme prêt à prendre un abonnement.
   $P(H \cap A) = P(H) \times P_H(A) = 0,4 \times 0,15 = 0,06$.
   La probabilité que ce soit un homme prêt à s'abonner est 0,06.
5. Pauline trouve un papier de sondage d'un habitant indiquant "je ne veux pas m'abonner". Déterminer la probabilité que l'écriture soit celle d'une femme.
   On cherche $P_{\overline{A}}(F) = \dfrac{P(F \cap \overline{A})}{P(\overline{A})}$.
   F et H forment une partition de l'univers.

D'après la formule des probabilités totales,
$P(A) = P(F \cap A) + P(H \cap A) = 0,24 + 0,06 = 0,3$.
Donc $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,3 = 0,7$.
Ainsi, $P_{\overline{A}}(F) = \dfrac{P(F \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \dfrac{0,6 \times 0,6}{0,7} = \dfrac{18}{35} \approx 0,514$.
Sachant que le papier indique "Je ne veux pas m'abonner", la probabilité que ce soit l'écriture d'une femme est de $\dfrac{18}{35}$.

Exercice 4 (5 points)

1. La suite (A_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} A_0 = 4 \\ A_{n+1} = A_n - \dfrac{n^2+4}{3} \end{cases}$

   Montrer que (A_n) est décroissante.

   Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} - A_n = -\dfrac{n^2+4}{3} < 0$ car n est un entier naturel.
   Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} < A_n$.
   $\boxed{\text{La suite } (A_n) \text{ est strictement décroissante.}}$

2. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $B_n = \dfrac{11n}{3n+1}$

   (a) Calculer B_0 et B_1.
   $B_0 = \dfrac{11 \times 0}{3 \times 0 + 1} = \dfrac{0}{1} = 0$.
   $B_1 = \dfrac{11 \times 1}{3 \times 1 + 1} = \dfrac{11}{4} = 2,75$.

   (b) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_{n+1} - B_n = \dfrac{11}{(3n+1)(3n+4)}$.
   Que peut-on en déduire sur la suite (B_n) ?
   Pour tout entier n,
   $B_{n+1} - B_n = \dfrac{11(n+1)}{3(n+1)+1} - \dfrac{11n}{3n+1} = \dfrac{11n+11}{3n+4} - \dfrac{11n}{3n+1}$
   $B_{n+1} - B_n = \dfrac{(11n+11)(3n+1) - 11n(3n+4)}{(3n+4)(3n+1)}$.
   $B_{n+1} - B_n = \dfrac{33n^2 + 11n + 33n + 11 - 33n^2 - 44n}{(3n+1)(3n+4)}$
   $B_{n+1} - B_n = \dfrac{11}{(3n+1)(3n+4)} > 0$ car $n \geqslant 0$.
   Donc pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $B_{n+1} > B_n$.
   $\boxed{(B_n) \text{ est strictement croissante.}}$

3. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $C_n = n + (-2)^n \times (n+7)$. Montrer que (C_n) n'est ni croissante ni décroissante.
   $C_0 = 0 + (-2)^0 \times (0+7) = 1 \times 7 = 7$.
   $C_1 = 1 + (-2)^1 \times (1+7) = 1 - 2 \times 8 = 1 - 16 = -15$.
   $C_2 = 2 + (-2)^2 \times (2+7) = 2 + 4 \times 9 = 2 + 36 = 38$.
   Comme $C_1 < C_0$, la suite (C_n) n'est pas croissante.
   Comme $C_2 > C_1$, la suite (C_n) n'est pas non plus décroissante.
   $\boxed{\text{Donc } (C_n) \text{ est ni croissante ni décroissante (pas monotone).}}$

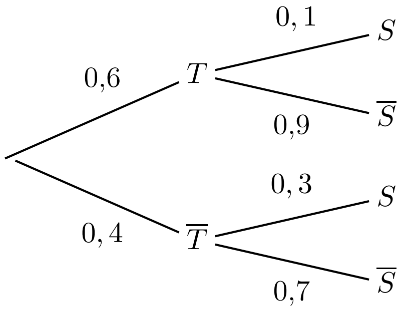
Exercice 5 (5 points)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 100$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{4}{5}u_n + 5$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
   $u_1 = \dfrac{4}{5}u_0 + 5 = \dfrac{4}{5} \times 100 + 5 = 85$.
   $u_2 = \dfrac{4}{5}u_1 + 5 = \dfrac{4}{5} \times 85 + 5 = 73$.
   $u_3 = \dfrac{4}{5}u_2 + 5 = \dfrac{4}{5} \times 73 + 5 = \dfrac{317}{5} = 63,4$.
2. Donner la valeur de u_{10} arrondie à 10^{-2} près.
   $u_{10} \approx 33,05$.
3. Compléter la fonction Python d'argument n qui renvoie la valeur de u_n pour tout entier $n \geqslant 0$.
```
def Terme(n) :
    u=100
    for k in range(1,n+1):
        u=4/5*u+5
    return(u)
```
4. Écrire une fonction Python d'argument $n \geqslant 0$ qui renvoie la somme des termes de u_0 à u_n, soit $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.
```
def Somme(n) :
    u=100
    S=u
    for k in range(1,n+1):
        u=4/5*u+5
        S=S+u
    return(S)
```

1G. Contrôle n° 2
Correction du sujet 2

Exercice 6 (3 points)
On a représenté une expérience aléatoire par l'arbre pondéré ci-dessous.



1. Donner sans justification les probabilités suivantes :
   $P(T)$; $P_{\overline{T}}(\overline{S})$; $P_{\overline{T}}(S)$
   $P(T) = 0,6$; $P_{\overline{T}}(\overline{S}) = 0,7$; $P_{\overline{T}}(S) = 0,3$

2. Montrer que $P(S) = 0,18$.
   T et $\overline{T}$ forment une partition de l'univers, d'après la formule des probabilités totales,
   $P(S) = P(T \cap S) + P(\overline{T} \cap S)$
   $P(S) = P(T) \times P_T(S) + P(\overline{T}) \times P_{\overline{T}}(S)$
   $P(S) = 0,6 \times 0,1 + 0,4 \times 0,3 = 0,06 + 0,12 = 0,18$.
3. Déterminer, en justifiant, la probabilité conditionnelle $P_S(T)$.
   $P_S(T) = \dfrac{P(T \cap S)}{P(S)} = \dfrac{0,6 \times 0,1}{0,18} = \dfrac{0,06}{0,18} = \dfrac{1}{3}$.

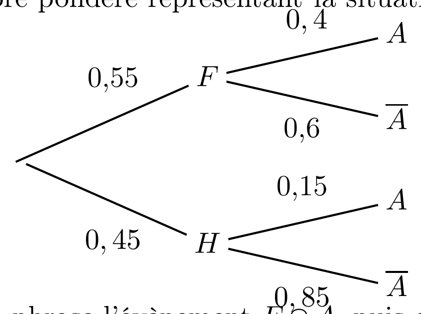
Exercice 7 (2 points)
Les données sont celles du tableau de probabilités ci-dessous où A et B sont deux événements d'une expérience alétoire.

	A	$\overline{A}$	Total
B	0,19	0,35	0,54
$\overline{B}$	0,26	0,2	0,46
Total	0,45	0,55	1

Donner sans justification : $P(\overline{B})$; $P(A)$; $P(A \cap B)$; $P_A(B)$; $P(A \cup B)$.
$P(\overline{B}) = 0,46$, $P(A) = 0,45$; $P(A \cap B) = 0,19$;
$P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{0,19}{0,45} = \dfrac{19}{45}$
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,45 + 0,54 - 0,19 = 0,8$.

Exercice 8 (5 points)
Une salle de sport ouvre dans une commune composée de 11000 femmes et 9000 hommes. Un sondage montre que 40% des femmes sont prêtes à prendre un abonnement, contre seulement 15% des hommes. On rencontre au hasard un habitant de la commune. On note :
— F : "la personne est une femme",
— H : "la personne est un homme",
— A : " le personne est prête à prendre un abonnement".

1. Montrer que $P(F) = 0,55$.
   Il y a équiprobabilité.
   $P(F) = \dfrac{nb\ cas\ favorables}{nb\ cas\ total} = \dfrac{11000}{9000 + 11000} = \dfrac{11}{20} = 0,55$.
2. Contruire un arbre pondéré représentant la situation.



3. Traduite par une phrase l'évènement $F \cap A$, puis calculer sa probabilité.
   $F \cap A$: "La personne est une femme et est prête à s'abonner".
   $P(F \cap A) = P(F) \times P_F(A) = 0,55 \times 0,4 = 0,22$.
4. Calculer la probabilité que la personne soit un homme prêt à prendre un abonnement.
   $P(H \cap A) = P(H) \times P_H(A) = 0,45 \times 0,15 = 0,0675$. La probabilité que ce soit un homme prêt à s'abonner est 0,0675.
5. Pauline trouve un papier de sondage d'un habitant indiquant "je ne veux pas m'abonner". Déterminer la probabilité que l'écriture soit celle d'une femme.
   On cherche $P_{\overline{A}}(F) = \dfrac{P(F \cap \overline{A})}{P(\overline{A})}$.
   F et H forment une partition de l'univers.
   D'après la formule des probabilités totales,

$P(A) = P(F \cap A) + P(H \cap A) = 0,22 + 0,0675 = 0,2875.$
Donc $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,2875 = 0,7125.$
Ainsi, $P_{\overline{A}}(F) = \dfrac{P(F \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \dfrac{0,55 \times 0,6}{0,7125} = \dfrac{44}{95} \approx 0,463.$
Sachant que le papier indique "Je ne veux pas m'abonner", la probabilité que ce soit l'écriture d'une femme est de $\dfrac{44}{95}$.

Exercice 9 (5 points)

1. La suite (A_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} A_0 = 4 \\ A_{n+1} = A_n + \dfrac{n^2}{n+3} \end{cases}$

   Montrer que (A_n) est coissante.

2. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $B_n = \dfrac{7n-1}{n+2}$.

   (a) Calculer B_0 et B_1.
   $B_0 = \dfrac{7 \times 0 - 1}{0+2} = -\dfrac{1}{2}.$
   $B_1 = \dfrac{7 \times 1 - 1}{1+2} = 2.$

   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_{n+1} - B_n = \dfrac{15}{(n+2)(n+3)}$.
   Que peut-on en déduire sur la suite (B_n) ?
   $B_{n+1} - B_n = \dfrac{7(n+1)-1}{(n+1)+2} - \dfrac{7n-1}{n+2}$
   $B_{n+1} - B_n = \dfrac{7n+6}{n+3} - \dfrac{7n-1}{n+2}$
   $B_{n+1} - B_n = \dfrac{(7n+6)(n+2) - (7n-1)(n+3)}{(n+2)(n+3)}$
   $B_{n+1} - B_n = \dfrac{7n^2 + 14n + 6n + 12 - (7n^2 + 21n - n - 3)}{(n+2)(n+3)}$
   $B_{n+1} - B_n = \dfrac{15}{(n+2)(n+3)}$
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 0$, donc $B_{n+1} - B_n = \dfrac{15}{(n+2)(n+3)} > 0.$
   Donc (B_n) est strictement croissante.

3. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $C_n = n + (-2)^n \times n^2$.
   Montrer que (C_n) n'est ni croissante ni décroissante.
   $C_0 = 0 + 1 \times 0^2 = 0.$
   $C_1 = 1 + (-2) \times 1^2 = -1.$
   $C_2 = 2 + (-2)^2 \times 2^2 = 2 + 4 \times 4 = 18.$
   Comme $C_1 < C_0$, la suite (C_n) n'est pas croissante.
   Comme $C_2 > C_1$, la suite (C_n) n'est pas non plus décroissante.
   $\boxed{\text{Donc } (C_n) \text{ est ni croissante ni décroissante (pas monotone).}}$

Exercice 10 (5 points)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{3}{2}u_n + 3$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
   $u_1 = \dfrac{3}{2} \times u_0 + 3 = \dfrac{3}{2} \times 2 + 3 = 3 + 3 = 6.$
   $u_2 = \dfrac{3}{2} \times u_1 + 3 = \dfrac{3}{2} \times 6 + 3 = 9 + 3 = 12.$
   $u_3 = \dfrac{3}{2} \times u_2 + 3 = \dfrac{3}{2} \times 12 + 3 = 18 + 3 = 21.$

2. Donner u_{10} arrondi à 10^{-2} près.
   $\boxed{u_{10} \approx 455,32}$

3. Compléter la fonction Python d'argument n qui renvoie la valeur de u_n pour tout entier $n \geqslant 0$.
```
def Terme(n) :
    u=2
    for k in range(1,n+1):
        u=3/2*u+3
    return(u)
```

4. Écrire une fonction Python d'argument $n \geqslant 0$ qui renvoie la somme des termes de u_0 à u_n, soit $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.
```
def Somme(n) :
    u=2
    S=u
    for k in range(1,n+1):
        u=3/2*u+3
        S=S+u
    return(S)
```