Chapitre 14 : Fonctions trigonométriques

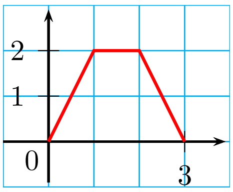
I Fonctions cosinus et sinus

I.1 Périodicité

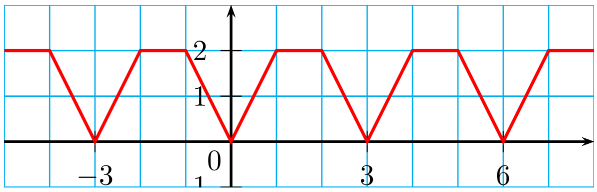
Définition
Soient f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, et $T > 0$ un nombre strictement positif.
On dit que f est périodique de période T (ou T-périodique) lorsque pour tout x réel :

$$f(x+T) = f(x)$$

Conséquence graphique
Lorsqu'une fonction est T-périodique, sa courbe représentative est invariante par la translation de vecteur $T\overrightarrow{i}$ (et aussi $2T\overrightarrow{i}$, $3T\overrightarrow{i}$, ..., $-T\overrightarrow{i}$, ...).
Il suffit alors de connaître sa courbe sur n'importe quel intervalle de longueur T (par exemple $[0;T]$) pour pouvoir la compléter entièrement par des translations.



f périodique $\xrightarrow{\hspace{2cm}}$ de période 3



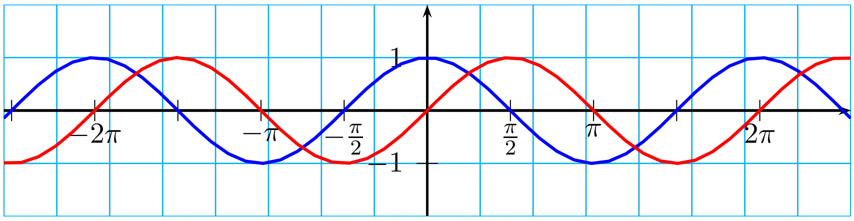
I.2 Étude des fonctions cos et sin

Théorème

1. Les fonctions sin et cos sont définies sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodiques.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$\cos(x+2\pi) = \cos(x)$$
   $$\sin(x+2\pi) = \sin(x)$$
2. La fonction cos est paire et la fonction sin est impaire.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$\begin{array}{rcl} \cos(-x) & = & \cos(x) \\ \sin(-x) & = & -\sin(x) \end{array}$$
3. Tableaux de variation sur $[0;2\pi]$.

x	0	π	2π
$\cos x$	1 ↘	-1 ↗	1

x	0	$\pi/2$	$3\pi/2$	2π
$\sin x$	0 ↗	1 ↘	-1 ↗	0



$x \mapsto \sin x$
$x \mapsto \cos x$

Remarque

1. La 2π-périodicité des fonctions cos et sin donne de façon plus générale :
   Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(-x) = \cos(x)$. La fonction cosinus est paire.
   La courbe de la fonction cosinus est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(-x) = \sin(x)$. La fonction sinus est impaire.
   La courbe de la fonction sinus est symétrique par rapport au point O.
4. La courbe de la fonction sin s'obtient à partir de celle de la fonction cos par la translation de vecteur $\frac{\pi}{2}\vec{i}$.
   En effet, pour tout x réel, $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.
   On a utilisé la relation $\cos(-X) = \cos(X)$ appliquée à $X = x - \frac{\pi}{2}$. Comme $\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$, la courbe de la fonction sin s'obtient à partir de celle de la fonction cos par la translation de vecteur $\frac{\pi}{2}\vec{i}$.

Théorème (Dérivation)
Les fonctions sin et cos sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\sin'(x) = \cos(x) \text{ et } \cos'(x) = -\sin(x).$$

Propriété
Soient a et b deux réels, et f, g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(ax + b)$ et $g(x) = \sin(ax + b)$. Alors f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = -a\sin(ax + b)$$

$$g'(x) = a\cos(ax + b)$$

Démonstration
On utilise le théorème de dérivation de $v(ax + b)$.

$$[v(ax + b)]' = av'(ax + b)$$

Pour $f(x) = \cos(ax + b)$, on a $v(x) = \cos x$ et $v'(x) = -\sin x$.
$f'(x) = a \times \cos'(ax + b) = a \times [-\sin(ax + b)] = -a\sin(ax + b)$.
Pour $f(x) = \sin(ax + b)$, on a $v(x) = \sin x$ et $v'(x) = \cos x$.
$f'(x) = a \times \sin'(ax + b) = a\cos(ax + b)$.

Propriété (à connaître)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Démonstration
On sait que la fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\sin' = \cos$ (on a admis ce résultat).
En particulier, la fonction sin est dérivable en 0, et d'après la définition du nombre dérivé,

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} &= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} \\ &= \sin'(0) \\ &= \cos(0) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Remarque
Les fonctions cos et sin n'ont pas de limite en $+\infty$, ni en $-\infty$.

Exercice 1
En remarquant un taux d'accroissement, montrer que $\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$.

II Formules de trigonométrie

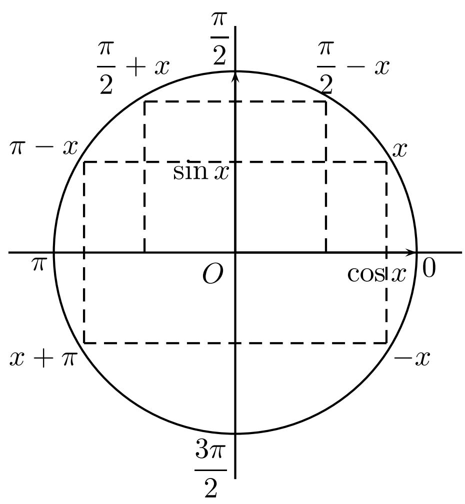
Pour tous réels a, b, x, on a les formules suivantes.

Le théorème de Pythagore dans le cercle trigonométrique

$$\cos^2 a + \sin^2 a = 1$$

Angles associés. À savoir lire sur le cercle trigonométrique

$$\begin{aligned} \cos(-x) &= \cos(x) \\ \sin(-x) &= -\sin(x) \\ \cos(x+\pi) &= -\cos(x) \\ \sin(x+\pi) &= -\sin(x) \\ \cos(\pi - x) &= -\cos(x) \\ \sin(\pi - x) &= \sin(x) \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \sin(x) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \cos(x) \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= -\sin(x) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= \cos(x) \end{aligned}$$



Formules d'addition

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

Formules de soustraction

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$

On les retrouve en remplaçant b par $(-b)$ dans les formules d'addition.

Formules de duplication

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$$

$$\sin(2a) = 2 \sin a \cos a$$

On les retrouve en remplaçant b par a dans les formules d'addition.

Formules de linéarisation

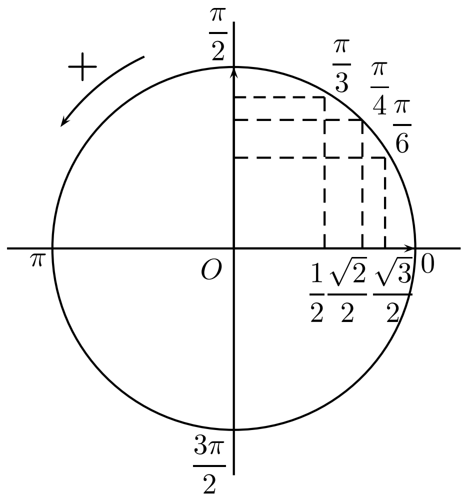
$$\cos^2 a = \frac{1+\cos(2a)}{2}$$

$$\sin^2 a = \frac{1-\cos(2a)}{2}$$

C'est la formule de duplication de $\cos(2a)$ écrite autrement.

Valeurs remarquables

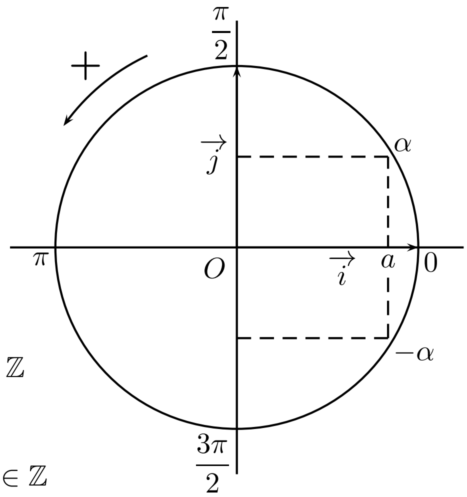
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0



II.1 Équations $\cos(x) = a$, $\sin(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$.

II.1.a Équation $\cos(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$.

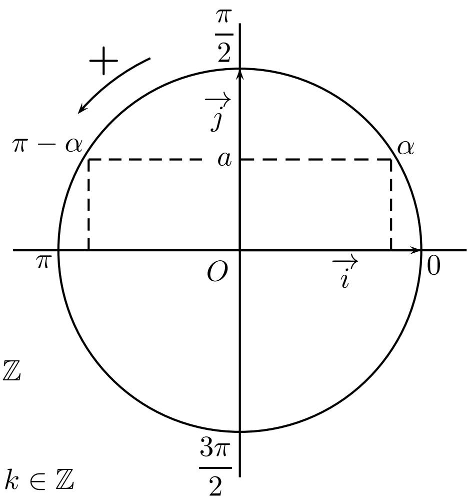
- Si $a < -1$ ou si $a > 1$, on remarque que l'équation n'a pas de solution. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$.
- Sinon, ($-1 \leqslant a \leqslant 1$), il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\cos(\alpha) = a$.
  $\cos(x) = a \Leftrightarrow \cos(x) = \cos(\alpha)$.
  En étudiant le cercle trigonométrique, on obtient alors :



$$\cos(x) = \cos(\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi, & k \in \mathbb{Z} \\ \quad ou & \\ x = -\alpha + k2\pi, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

II.1.b Équation $\sin(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$.

- De même que précédemment, si $a < -1$ ou si $a > 1$ l'équation n'a pas de solution. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$.
- Sinon, ($-1 \leqslant a \leqslant 1$), il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\sin(\alpha) = a$.
  $\sin(x) = a \Leftrightarrow \sin(x) = \sin(\alpha)$.
  En étudiant le cercle trigonométrique, on obtient alors :



$$\sin(x) = \sin(\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi, & k \in \mathbb{Z} \\ \quad ou & \\ x = \pi - \alpha + k2\pi, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

III Complément : la fonction tangente

Définition
On appelle tangente et on note tan la fonction définie par $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.
Elle est définie en tout nombre réel x tel que $\cos(x) \neq 0$.
Son ensemble de définition est $D_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Propriété
La fonction tangente est impaire et π-périodique.

Théorème
La fonction tangente est dérivable sur $D_{\tan}$ et on a pour tout $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$:

$$\tan' x = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Démonstration

Ces résultats sont en partie démontrés dans le devoir maison. $\square$

IV Exercices

Exercice 2

Soit $f(x) = \mathrm{e}^{-x} \sin x$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Interpréter graphiquement.
2. Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à (Ox) sur $[0; 2\pi]$.
3. Montrer que $f'(x) = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-x} \cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$.
4. Dresser le tableau de variation de f sur $[0; 2\pi]$.

Exercice 3 (Symbole p 243)

$f(t) = 5\cos\left(4t - \dfrac{\pi}{3}\right)$. Dresser le tableau de variation de f sur $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Exercice 4 (Symbole 30 p 248)

f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \dfrac{2}{5}\cos\left(3t + \dfrac{\pi}{6}\right)$.

1. Montrer que f n'est ni paire ni impaire.
2. Montrer que f est périodique de période $\dfrac{2\pi}{3}$.
3. Résoudre l'équation $f'(t) = 0$ dans $I = \left[0; \dfrac{2\pi}{3}\right]$.
4. Dresser le tableau de variation de f sur I.