

1re G

Correction du dm1

Exercice 1

Mettre les fonctions suivantes sous forme canonique, puis en déduire le tableau de variation. Justifier.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 6x + 1$

Les coefficients sont $a = 1$, $b = -6$, et $c = 1$.

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = \frac{6}{2} = 3.$$

$$\beta = f(\alpha) = f(3) = 3^2 - 6 \times 3 + 1 = -8.$$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (x - 3)^2 - 8$.

Tableau de variation.

Le sommet est $S(3; -8)$. Comme $a = 1 > 0$, la parabole est tournée vers le haut. Donc

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f(x)$		-8	

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = -5x^2 + x + 9$.

Les coefficients sont $a = -5$, $b = 1$, et $c = 9$.

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = \frac{-1}{-10} = \frac{1}{10} = 0,1.$$

$$\beta = f(\alpha) \text{ ou bien } \beta = -\frac{\Delta}{4a}.$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 + 4 \times 5 \times 9 = 181.$$

$$\beta = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{-181}{-20} = \frac{181}{20} = 9,05.$$

$$\text{Donc pour tout } x \in \mathbb{R}, g(x) = -5 \left(x - \frac{1}{10} \right)^2 + \frac{181}{20}.$$

Tableau de variation.

Le sommet est $S(0,1; 9,05)$. Comme $a = -5 < 0$, la parabole est tournée vers le bas. Donc

x	$-\infty$	0,1	$+\infty$
$g(x)$		9,05	

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = 4x^2 + x - 7$

Les coefficients sont $a = 4$, $b = 1$, et $c = -7$.

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{8} = -0,125.$$

$$\beta = f(\alpha) = f\left(-\frac{1}{8}\right) = 4 \times \left(-\frac{1}{8}\right)^2 + \left(-\frac{1}{8}\right) - 7$$

$$\beta = \frac{1}{16} - \frac{2}{16} - \frac{7 \times 16}{16} = \frac{-1 - 112}{16} = -\frac{113}{16}.$$

$$\text{Donc pour tout } x \in \mathbb{R}, h(x) = 4 \left(x + \frac{1}{8} \right)^2 - \frac{113}{16}.$$

Tableau de variation.

Le sommet est $S\left(-\frac{1}{8}; -\frac{113}{16}\right)$. Comme $a = 4 > 0$, la parabole est tournée vers le haut. Donc

x	$-\infty$	$-1/8$	$+\infty$
$h(x)$		$-113/16$	

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 - 2x + 2$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -(x + 1)^2 + 3$.

Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$-(x - 1)^2 + 3 = -(x^2 + 2x + 1) + 3 = -x^2 - 2x + 2 = f(x).$$

Donc que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -(x + 1)^2 + 3$.

2. En reconnaissant dans l'expression précédente la forme canonique d'une fonction du second degré, dresser le tableau de variation de f . Justifier.

On reconnaît la forme canonique $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ avec $a = -1$, $\alpha = -1$, et $\beta = 3$.

La parabole est tournée vers le bas car $a = -1 < 0$, et a pour sommet le point $S(-1; 3)$.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow \quad 3 \quad \searrow$		

3. Soit (d) la droite d'équation $y = -x - 4$.

(a) Tracer dans le repère ci-contre la courbe de f et la droite (d) .

Pour la droite d , il suffit de déterminer les coordonnées de 2 points.

x	0	2
$-x - 4$	-4	-6

Pour la courbe de f , on obtient à l'aide de la calculatrice :

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-6	-1	2	3	2	-1	-6	-13

(b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) - (-x - 4) = (x + 3)(2 - x).$$

D'une part,

$$f(x) - (-x - 4) = -x^2 - 2x + 2 - (-x - 4) = -x^2 - 2x + 2 + x + 4 = -x^2 - x + 6.$$

D'autre part, en développant,

$$(x + 3)(2 - x) = -x^2 - x + 6.$$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - (-x - 4) = (x + 3)(2 - x)$.

(c) En déduire le tableau de signe de $f(x) - (-x - 4)$, puis la position relative de $\mathcal{C}_f$ et (d) . On vérifiera la cohérence de ce résultat avec la graphique.

On étudie le signe de $f(x) - (-x - 4)$ à partir de la forme factorisée qui est $(x + 3)(2 - x)$.

Valeurs clés :

$x + 3 = 0$ ssi $x = -3$, et $2 - x = 0$ ssi $x = 2$.

x	$-\infty$	-3	2	$+\infty$	
$x + 3$	$-$	0	$+$	$+$	
$2 - x$	$+$	$+$	0	$-$	
$f(x) - (-x - 4)$	$-$	0	$+$	0	$-$

On en déduit que lorsque $x \in]-\infty; -3[\cup]2; +\infty[$, $f(x) < -x - 4$.

Donc sur $] -\infty; -3[\cup]2; +\infty[$, $\mathcal{C}_f$ est en-dessous de (d) .

Lorsque $x \in]-3; 2[$, $f(x) > -x - 4$.

Donc $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de (d) sur $] -3; 2[$.

Enfin $f(x) = -x - 4$ ssi $x = -3$ ou $x = 2$, donc $\mathcal{C}_f$ et (d) se coupent aux points d'abscisses -3 et 2 .

Tous ces résultats sont bien cohérents avec le graphique.

