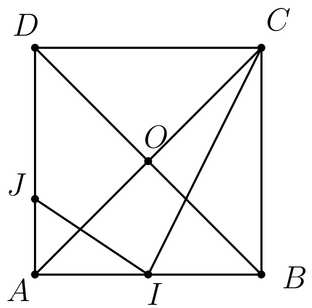
Interrogation n° 7
Sujet 1

Exercice 1 (4 points)
Les questions sont indépendantes.

Dans chaque cas, calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$. Justifier.

1. ABC est un triangle rectangle en A, $AB = 2$, $BC = 3$.
2. ABC est un triangle isocèle rectangle en C, et de base $AB = 6$.
3. Dans un repère orthonormé, $A(-5; 2)$, $B(-2; -1)$, $C(4; 0)$.
4. $AB = AC = 2$, et $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = -\dfrac{\pi}{3}$.

Exercice 2 (8 points)
Soit $ABCD$ un carré de côté 1.
On note O le centre du carré et I le milieu de $[AB]$.
Le point J est défini par $\overrightarrow{AJ} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}$.



1. Calculer, en justifiant la réponse, les produits scalaires :
   $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DA}$ $\qquad$ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OD}$ $\qquad$ $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{BC}$
2. (a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{IC}$.
   (b) En déduire la valeur exacte de $\cos(\widehat{JIC})$ puis la mesure de l'angle $\widehat{JIC}$ à un degré près.

Exercice 3 (4 points)
Dans un sac, on met 2 billets de 5 €, 1 billet de 10 €, et 2 billets de 20 €.
Pour participer au jeu, il faut payer une mise de 25 €.
On tire successivement et sans remise deux billets du sac.
À chaque étape, tous les billets présents dans le sac ont la même probabilité d'être choisis.

1. Représenter l'expérience à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Soit X la variable aléatoire représentant le montant gagné par le joueur (en additionnant les deux billets tirés, et en tenant compte de la mise de départ). Quelles sont les valeurs possibles pour X ?
3. Déterminer la loi de probabilité de X.
4. Calculer l'espérance de X. Le jeu est-il intéressant pour le joueur (d'un point de vue financier) ?

Exercice 4 (4 points)
Un organisateur annonce qu'à une loterie, il y aura exactement 1 billet gagnant 5000 euros, 5 billets gagnants 1000 euros et 50 billets gagnant 50 euros, sur un total de N billets.
Le prix d'achat d'un billet est de 5 euros.
On note X la variable aléatoire représentant le gain du joueur, c'est à dire le montant du lot gagné moins le prix du billet.

1. (a) Combien y a-t-il de billets non gagnants ?
   (b) Quelles sont les valeurs possibles de X ?
   (c) Déterminer, en fonction de N, la loi de probabilité de X.
2. Justifier que l'espérance de X est $E(X) = \dfrac{12500}{N} - 5$.
3. L'organisateur prévoit de vendre la totalité des billets et il souhaite faire un bénéfice de 2000 euros.
   (a) Déterminer le nombre N de billets à émettre.
   (b) En déduire la valeur exacte de $E(X)$.
   (c) Calculer alors la probabilité de l'événement A « le gain du joueur est au moins égal à 45 euros ».

Exercice 5 (bonus, 1 point)
Dans un repère orthonormé, on donne $A(-3; -3)$, $B(-4; 4)$, et $C(5; 1)$. Déterminer les coordonnées du pied H de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.

Interrogation n° 7
Sujet 2

Exercice 6 (4 points)

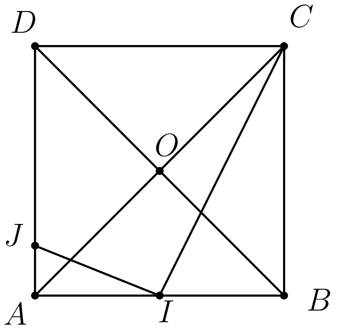
Les questions sont indépendantes.

Dans chaque cas, calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$. Justifier.

1. ABC est un triangle rectangle en A, $AB = 2$, $AC = 5$.
2. ABC est un triangle isocèle rectangle en C, et de base $AB = 10$.
3. Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}\,; \vec{j}\,)$, $A(-5; 2)$, $B(-2; -1)$, $C(4; 0)$.
4. $AB = AC = 6$, et $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \dfrac{2\pi}{3}$.

Exercice 7 (8 points)

Soit $ABCD$ un carré de côté 1.
On note O le centre du carré et I le milieu de $[AB]$.
Le point J est défini par $\overrightarrow{AJ} = \dfrac{1}{5}\overrightarrow{AD}$.



1. Calculer, en justifiant la réponse, les produits scalaires suivants :
   $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BA}$ $\qquad$ $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{OD}$ $\qquad$ $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{BC}$
2. (a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{IC}$.
   (b) Déterminer la valeur exacte de $\cos(\widehat{JIC})$, puis la mesure de l'angle $\widehat{JIC}$ à un degré près.

Exercice 8 (4 points)

Dans un sac, on met 3 billets de 5 €, 1 billet de 10 €, et 1 billet de 20 €.
Pour participer au jeu, il faut payer une mise de 21 €.
On tire successivement et sans remise deux billets du sac.
À chaque étape, tous les billets présents dans le sac ont la même probabilité d'être choisis.

1. Représenter l'expérience à l'aide d'un arbre de probabilités.
2. Soit X la variable aléatoire représentant le montant gagné par le joueur (en additionnant les deux billets tirés, et en tenant compte de la mise de départ). Quelles sont les valeurs possibles pour X ?
3. Déterminer la loi de probabilité de X.
4. Calculer l'espérance de X. Le jeu est-il intéressant pour le joueur (d'un point de vue financier) ?

Exercice 9 (4 points)

Un organisateur annonce qu'à une loterie, il y aura exactement 1 billet gagnant 5000 euros, 5 billets gagnants 1000 euros et 50 billets gagnant 50 euros, sur un total de N billets.
Le prix d'achat d'un billet est de 5 euros.
On note X la variable aléatoire représentant le gain du joueur, c'est à dire le montant du lot gagné moins le prix du billet.

1. (a) Combien y a-t-il de billets non gagnants ?
   (b) Quelles sont les valeurs possibles de X ?
   (c) Déterminer, en fonction de N, la loi de probabilité de X.
2. Justifier que l'espérance de X est $E(X) = \dfrac{12500}{N} - 5$.
3. L'organisateur prévoit de vendre la totalité des billets et il souhaite faire un bénéfice de 2000 euros.
   (a) Déterminer le nombre N de billets à émettre.
   (b) En déduire la valeur exacte de $E(X)$.
   (c) Calculer alors la probabilité de l'événement A « le gain du joueur est au moins égal à 45 euros ».

Exercice 10 (bonus, 1 point)

Dans un repère orthonormé, on donne $A(-3; -3)$, $B(-4; 4)$, et $C(5; 1)$. Déterminer les coordonnées du pied H de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.