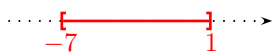
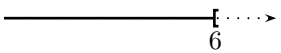
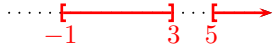
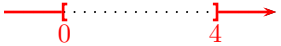
Contrôle de mathématiques n° 1
Correction du sujet 1

Exercice 1 (cours, 2 points)
Compléter sur l'énoncé.
On se place dans un repère du plan.

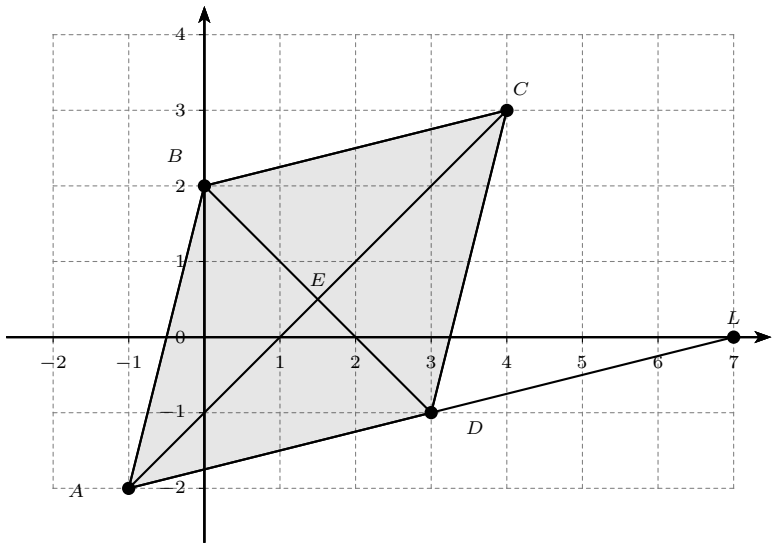
1. Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points.
   Le milieu K du segment $[AB]$ a pour coordonnées :
   $$x_K = \frac{x_A + x_B}{2}, \text{ et } y_K = \frac{y_A + y_B}{2}$$
2. On suppose de plus que le repère est orthonormé.
   Le cercle de centre $\Omega(-1; 4)$ et de rayon 3 a pour équation :
   $$(x+1)^2 + (y-4)^2 = 9$$

Exercice 2 (5 points)
Compléter (ou recopier) le tableau suivant. Les solutions sont représentées en traits pleins, les parties en pointillés ne sont pas solutions.

Inégalité	Intervalle	Représentation
$-7 \leqslant x \leqslant 1$	$[-7; 1]$	
$x < 6$	$]-\infty; 6[$	
$x > -1$	$]-1; +\infty[$	
$x \geqslant -2$	$[-2; +\infty[$	
$-1 \leqslant x \leqslant 3$ ou $x \geqslant 5$	$[-1; 3] \cup [5; +\infty[$	
$x < 0$ ou $x > 4$	$]-\infty; 0[\cup]4; +\infty[$	

Exercice 3 (8 points)

1. Placer dans un repère orthonormé les points $A(-1; -2)$, $B(0; 2)$, $C(4; 3)$, et $D(3; -1)$.
2. Déterminer les coordonnées du milieu E de $[AC]$.
   $x_E = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-1+4}{2} = 1,5.$
   $y_E = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{-2+3}{2} = 0,5.$
   $E(1,5; 0,5)$.
3. Montrer que $ABCD$ est un parallélogramme. Justifier.
   $ABCD$ est un parallélogramme ssi ses diagonales ont le même milieu.
   Notons F le milieu de $[BD]$.
   $x_F = \frac{x_B + x_D}{2} = \frac{0+3}{2} = 2,5.$
   $y_F = \frac{y_B + y_D}{2} = \frac{2-1}{2} = 0,5.$
   Donc $F(1,5; 0,5)$. E et F sont confondus.
   Comme ses diagonales ont le même milieu, le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.
4. Montrer que la longueur AB vaut $\sqrt{17}$.
   $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(0+1)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}.$
5. $ABCD$ est-il un losange ? Justifier.
   On sait que $ABCD$ est un parallélogramme. C'est un losange si il a deux côtés consécutifs de même longueur.
   $AD = \sqrt{(x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2} = \sqrt{(3+1)^2 + (-1+2)^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$.
   Comme $ABCD$ est un parallélogramme ayant deux côtés consécutifs de même longueur, $ABCD$ est un losange.
6. Déterminer par le calcul les coordonnées du symétrique L de A par rapport à D.
   On cherche L tel que D soit le milieu de $[AL]$.
   $x_D = \frac{x_A + x_L}{2}$, soit $3 = \frac{-1+x_L}{2}$, $x_L = 2 \times 3 + 1 = 7.$
   $y_D = \frac{y_A + y_L}{2}$, soit $-1 = \frac{-2+y_L}{2}$, $y_L = -2 + 2 = 0.$
   Donc $L(7; 0)$.



Exercice 4 (5 points)
Variables a, b, c, d, e, f sont des nombres.
Début

Entrer a
b prend la valeur $2 \times a$
c prend la valeur $b + 3$
d prend la valeur $c \times c$
e prend la valeur $4 \times a \times a$
f prend la valeur $d - e$
Afficher f

Fin

1. Que renvoie l'algorithme lorsque l'on entre $a = -2$?

a	b	c	d	e	f
-2	-4	-1	1	16	-15

2. Que renvoie l'algorithme lorsque l'on entre $a = 1$?

a	b	c	d	e	f
1	2	5	25	4	21

3. Quelle est l'expression de la fonction associée à cet algorithme ?
   $\boxed{f(x) = (2x+3)^3 - 4x^2}$
4. Pour quelle valeur de a peut-on faire afficher $f = 7$ en sortie ?
   On cherche x tel que $f(x) = 7$.
   En développant, $f(x) = 4x^2 + 12x + 9 - 4x^2 = 12x + 9$.
   D'où l'équation $12x + 9 = 7$, $x = -\dfrac{1}{6}$.
   $\boxed{\text{Il faut entrer } a = -\dfrac{1}{6} \text{ pour obtenir 7 en sortie.}}$

Exercice 5 (bonus, 2 points)
Dans un repère orthonormé du plan, on considère les points $A(-3;-3)$, $B(3;-1)$ et $C(0;8)$.
On donne la figure et les informations suivantes :

- Le point $I(-1.5;2.5)$ est le milieu de $[AC]$ et le centre du cercle circonscrit $\mathscr{C}$ au triangle ABC.
- $AB = 2\sqrt{10}$, $AC = \sqrt{130}$, et $BC = 3\sqrt{10}$.

1. Déterminer l'aire du trangle ABC.
   I est le milieu de $[AC]$ et le centre de son cercle circonscrit, donc $[AC]$ est un diamètre du cercle. Donc le triangle ABC est rectangle en B.

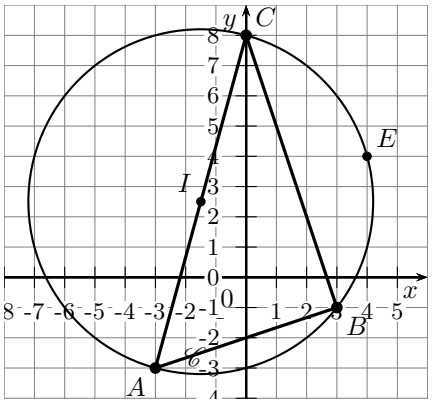
$$\begin{aligned}\mathcal{A}(ABC) &= \frac{base \times hauteur}{2} \\ &= \frac{AB \times BC}{2} \\ &= \frac{2\sqrt{10} \times 3\sqrt{10}}{2} \\ &= 10 \times 3 \\ &= 30\end{aligned}$$

$\boxed{\text{L'aire du triangle } ABC \text{ est 30 (unités d'aire).}}$

2. Soit $E(4;4)$. Vérifier par le calcul que le point E appartient au cercle $\mathscr{C}$. Justifier par le calcul.
   Le rayon de $\mathscr{C}$ est $r = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{\sqrt{130}}{2}$.
   $E \in \mathscr{C}$ si et seulement si $IE = \dfrac{\sqrt{130}}{2}$.

$$\begin{aligned}IE &= \sqrt{(x_E - x_I)^2 + (y_E - y_I)^2} \\ &= \sqrt{(4+1.5)^2 + (4-2.5)^2} \\ &= \sqrt{30.25 + 2.25} \\ &= \sqrt{32.5} \\ &= \sqrt{\frac{32.5 \times 4}{4}} \\ &= \frac{\sqrt{130}}{2} \\ &= r\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Donc } E \in \mathscr{C} \text{ } (E \text{ est sur le cercle}).}$

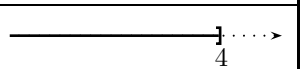
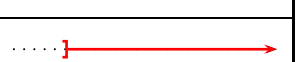
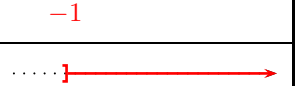
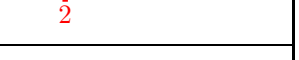
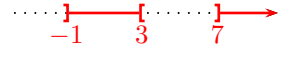


Contrôle de mathématiques n° 1
Réponses du sujet 2

Exercice 6 (cours, 2 points)
Compléter sur l'énoncé.
On se place dans un repère orthonormé du plan.

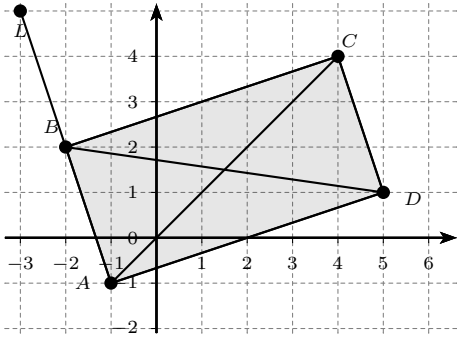
1. Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points.
   La distance AB est donnée par :
   $$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$
2. Le cercle de centre $\Omega(2; -4)$ et de rayon 5 a pour équation :
   $$(x-2)^2 + (y+4)^2 = 25$$

Exercice 7 (5 points)
Compléter (ou recopier) le tableau suivant. Les solutions sont représentées en traits pleins, les parties en pointillés ne sont pas solutions.

Inégalité	Intervalle	Représentation
$0 < x \leqslant 1$	$]0;1]$	
$x \leqslant 4$	$]-\infty;4]$	
$x > -1$	$]-1;+\infty[$	
$x > 2$	$]2;+\infty[$	
$-1 < x < 3$ ou $x > 7$	$]-1;3[\cup]7;+\infty[$	
$x \leqslant 0$ ou $x \geqslant 9$	$]-\infty;0] \cup [9;+\infty[$	

Exercice 8 (8 points)

1. Placer dans un repère orthonormé les points $A(-1;-1)$, $B(-2;2)$, $C(4;4)$, et $D(5;1)$.
2. Déterminer les coordonnées du milieu E de $[AC]$.
   $E(1,5;1,5)$.
3. Montrer que $ABCD$ est un parallélogramme. Justifier.
   On montre que la diagonale $[BD]$ a aussi pour milieu le point de coordonnées $(1,5;1,5)$.
   Comme ses diagonales ont le même milieu, le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.
4. Montrer que la longueur AC vaut $\sqrt{50}$ (ou bien $5\sqrt{2}$).
5. $ABCD$ est-il un rectangle ? Justifier.
   On montre que $BD = \sqrt{50}$.
   Comme $ABCD$ est un parallélogramme et que ses diagonales sont de même longueur, $ABCD$ est un rectangle.
6. Déterminer par le calcul les coordonnées du symétrique L de A par rapport à B.
   On trouve $L(-3;5)$.



Exercice 9 (5 points)
Début

Entrer a
b prend la valeur $5 \times a$
c prend la valeur $b - 1$
d prend la valeur $c \times c$
e prend la valeur $25 \times a \times a$
f prend la valeur $d - e$
Afficher f

Fin

1. Que renvoie l'algorithme lorsque l'on entre $a = -2$?

a	b	c	d	e	f
-2	-10	-11	121	100	21

2. Que renvoie l'algorithme lorsque l'on entre $a = 1$?

a	b	c	d	e	f
1	5	4	16	25	-9

3. Quelle est l'expression de la fonction associée à cet algorithme ?
   $\boxed{f(x) = (5x-1)^2 - 25x^2 = -10x + 1.}$
4. Pour quelle valeur de a peut-on faire afficher $f = 7$ en sortie ?
   $\boxed{f(x) = 7 \text{ ssi } x = -\frac{3}{5}.}$