Correction du devoir maison n° 6

Exercice 1 (n° 154 page 73)

Partie A

On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = 3x^3 - 4x - 8$.

1. Limites à l'infini.
   $g(x) = x^3 \times \left(1 - \dfrac{4}{x^2} - \dfrac{8}{x^3}\right)$.
   Donc,, par produit, $\lim\limits_{+\infty} g = +\infty$ et $\lim\limits_{-\infty} g = -\infty$.
2. Dérivée de g.
   g est une fonction polynôme, donc dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 9x^2 - 4x = (3x-2)(3x+2)$.
3. Signe de g', variations de g.
   $g'(x) = 0$ ssi $x = \dfrac{2}{3}$ ou $x = -\dfrac{2}{3}$.
   $g'(x) = 9x^2 - 4$ est du second degré, il prend de signe de a (positif ici) à l'extérieur des racines.

x	$-\infty$		$-2/3$		$2/3$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-56/9$	$\searrow$	$-88/9$	$\nearrow$	$+\infty$

4. Équation $g(x) = 0$, encadrement de α.
   D'après la question 3, g admet un maximum de $\dfrac{-56}{9} < 0$ sur l'intervalle $\left]-\infty ; \dfrac{2}{3}\right]$.
   Donc pour tout $x \leqslant \dfrac{2}{3}$, $g(x) < 0$.
   Sur l'intervalle $\left[\dfrac{2}{3} ; +\infty\right[$:
   — g est continue car dérivable,
   — g est strictement croissante,
   — $g\left(\dfrac{2}{3}\right) = -\dfrac{88}{9} < 0$ et $\lim\limits_{+\infty} g = +\infty$.
   D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $\left[\dfrac{2}{3} ; +\infty\right[$, et donc sur $\mathbb{R}$.
   On note α cette solution.
   À l'aide de la calculatrice, on trouve $1,70 < \alpha < 1,71$.
5. Signe de g.
   D'après les questions 3 et 4,

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

Partie B

On pose pour tout $x \neq 0$, $f(x) = \dfrac{3}{4}x + 1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$.

1. Limites, asymptote.
   Par somme, on montre que $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$, et $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	
x^2		$+$	0	$+$	

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3}{4}x + 1 = 0 + 1 = 1$.
$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$. Par somme, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.
On a une forme indéterminée pour la limite à gauche en 0.
$\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x+1}{x^2}$.
$\lim\limits_{0} x + 1 = 1$, et $\lim\limits_{x\to 0^-} x^2 = 0^+$. Par quotient, $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} = +\infty$.
Par somme, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$.

Comme les deux limites de f à droite et à gauche en 0 sont égales à $+\infty$, on peut même écrire $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$.
On en déduit que l'axe des ordonnées d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à la courbe $\mathscr{C}'$ de f.

2. Montrons que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{4x^3}$.
f est une fonction fraction rationnelle, elle est donc dérivable sur son ensemble de définition qui est $\mathbb{R}^*$.
Pour tout $x \neq 0$, $f'(x) = \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2x}{x^4} = \dfrac{3x^2 - 4x - 8}{4x^3} = \dfrac{g(x)}{4x^3}$.

3. Variation de g.
$4x^3 = 0$ ssi $x = 0$ (valeur interdite).
On rappelle que $g(x) = 0$ ssi $x = \alpha \approx 1,7$.

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
$4x^3$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	$\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$	$\|$	$+\infty$ $\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

À la calculatrice, $f(\alpha) \approx 3,2$.

4. Soit $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y = \dfrac{3}{4}x + 1$.
 (a) Étude de la position relative de $\mathscr{C}'$ et de $\mathscr{D}$.
 On étudie le signe de $f(x) - \left(\dfrac{3}{4}x + 1\right)$.
 $f(x) - \left(\dfrac{3}{4}x + 1\right) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x+1}{x^2}$.

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$\dfrac{x+1}{x^2}$		$-$	0	$+$	$\|$	$+$	

 $\mathscr{C}'$ est au dessus de $\mathscr{D}$ sur $]-1;0[\cup]0;+\infty[$.
 $\mathscr{C}'$ est en-dessous de $\mathscr{D}$ sur $]-\infty;-1[$.
 $\mathscr{C}'$ et $\mathscr{D}$ se coupent au point $A\left(-1;\dfrac{1}{4}\right)$.

 (b) On pose $d(x) = f(x) - \left(\dfrac{3}{4}x + 1\right)$. Limites de d à l'infini. Interprétation.
 $d(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$.
 Par somme de limites, $\lim\limits_{-\infty} d = 0$ et $\lim\limits_{+\infty} d = 0$.
 On en déduit que la droite d'équation $y = \dfrac{3}{4}x + 1$ est asymptote oblique à la courbe $\mathscr{C}'$ au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$.

5. Tracer $\mathscr{D}$ et $\mathscr{C}'$.
La droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = \dfrac{3}{4}x + 1$ passe par les points de coordonnées $(0;1)$ et $(4;4)$.