Interrogation n° 3
Réponses du Sujet 1

Exercice 1 (1 point)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soit $a \in I$. Donner la définition du fait que f est dérivable en a.

> On dit que f est dérivable en a si le taux d'accroissement $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet une limite réelle lorsque h tend vers 0.
> Ce nombre est alors appelé le nombre dérivé de f en a, noté $f'(a)$.
>
> $$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Exercice 2 (4 points)

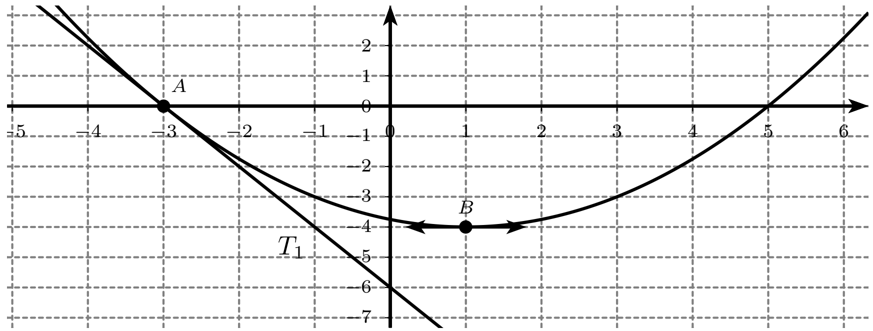
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 5x$

1. En revenant à la définition, étudier la dérivabilité de f en 2, et montrer que $f'(2) = -1$.
   Soit $h \neq 0$.
   $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = \dfrac{(2+h)^2 - 5(2+h) - (2^2 - 5 \times 2)}{h} = \dfrac{h^2 + 4h + 4 - 10 - 5h + 6}{h} = \dfrac{h^2 - h}{h} = h - 1.$
   $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = -1.$
   $\boxed{\text{Donc } f \text{ est dérivable en 2 et } f'(2) = -1.}$
2. En déduire une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 2.
   O sait que $f'(2) = -1$. $f(2) = 2^2 - 5 \times 2 = -6$.
   $y = f'(2)(x-2) + f(2) = -1(x-2) - 6 = -x - 4$.
   > La tangente à la courbe de f au point d'abscisse 2 a pour équation $y = -x - 4$.

Exercice 3 (2 points)

On a tracé ci-contre la courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. La droite T_1 est tangente à la courbe en A, et la courbe admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point B.

1. Déterminer $f'(-3)$. Justifier.
   > $f'(-3)$ est le coefficient directeur de la tangente au point A d'abscisse -3, $f'(-3) = -2$.
2. Déterminer $f'(1)$. Justifier.
   > Comme la tangente à la courbe au point d'abscisse 1 est parallèle à l'axe des abscisses, $f'(1) = 0$.



Exercice 4 (3 points)

1. Montrer que la fonction inverse définie pour tout $x \neq 0$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est dérivable en tout réel a non nul et que $f'(a) = \dfrac{-1}{a^2}$.
   Soient a un nombre réel non nul, et $h \neq 0$.
   $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \dfrac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} = \dfrac{\frac{a-(a+h)}{a(a+h)}}{h} = \dfrac{\frac{-h}{a(a+h)}}{h} = \dfrac{-h}{a(a+h)} \times \dfrac{1}{h} = -\dfrac{1}{a(a+h)}.$
   Il apparaît donc que
   $$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} -\frac{1}{a(a+h)} = -\frac{1}{a^2}$$
   > Donc f est dérivable en tout réel a non nul, et pour tout $a \neq 0$, $f'(x) = -\dfrac{1}{a^2}$.
2. En déduire que la courbe de la fonction inverse admet en deux points une tangente parallèle à la droite d'équation $y = -\dfrac{1}{4}x + 3$ et préciser les abscisses de ces deux points.
   La tangente est parallèle à cette droite ssi elle a le même coefficient directeur $-\dfrac{1}{4}$.
   Or, le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse a est $f'(a)$.
   On résout $f'(x) = \dfrac{-1}{4}$.
   f est dérivable en tout réel $x \neq 0$, et pour tout $x \neq 0$, $f'(x) = \dfrac{-1}{x^2}$.
   Donc $\dfrac{-1}{x^2} = \dfrac{-1}{4}$, $x^2 = 4$, et donc ($x = -2$ ou $x = 2$).
   > La courbe de la fonction inverse admet des tangentes parallèles à la droite d'équation $y = -\dfrac{1}{4}x + 3$ aux points d'abscisses -2 et 2.

Interrogation n^o 3
Réponses du Sujet 2

Exercice 5 (1 point)

Donner l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a pour une fonction f dérivable en a.

Soit f une fonction dérivable en un réel a. Une équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse a est : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

Exercice 6 (4 points)

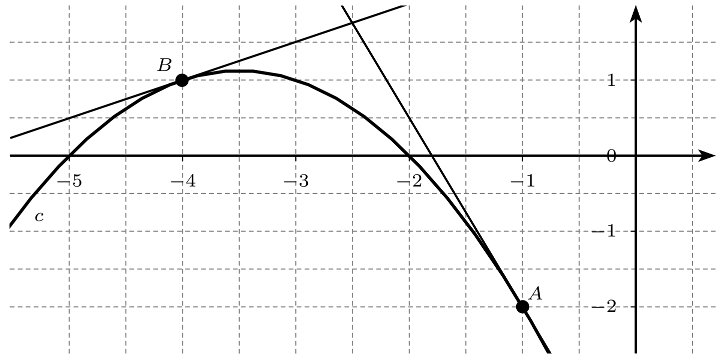
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + x$

1. En revenant à la définition, étudier la dérivabilité de f en -1, et montrer que $f'(-1) = -5$.
   Soit $h \neq 0$.
   $\dfrac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \dfrac{3(-1+h)^2 + (-1+h) - (3 \times (-1)^2 - 1)}{h}$
   $= \dfrac{3(h^2 - 2h + 1) + h - 1 - 2}{h} = \dfrac{3h^2 - 5h}{h} = 3h - 5.$
   $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = -5.$
   $\boxed{\text{Donc } f \text{ est dérivable en } -1 \text{ et } f'(-1) = -5.}$
2. En déduire une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse -1.
   On a $f'(-1) = -5$.
   $f(-1) = 3 \times (-1)^2 - 1 = 2$.
   $y = f'(-1)(x - (-1)) + f(-1) = -5(x+1) + 2 = -5x - 3$.
La tangente à la courbe de f au point d'abcisse -1 a pour équation $y = -5x - 3$.

Exercice 7 (2 points)

On a tracé ci-contre la courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et les tangentes à cette courbe aux points A et B.

1. Déterminer $f'(-4)$. Justifier.
   $f'(-4)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point B d'abscisse -4.
   $\boxed{f'(-4) = 0,5.}$
2. Déterminer $f'(-1)$. Justifier.
   $f'(-1)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point A d'abscisse -1.
   $\boxed{f'(-1) = -2,5.}$



Exercice 8 (3 points)

1. Montrer que la fonction inverse définie pour tout $x \neq 0$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est dérivable en tout réel a non nul et que $f'(a) = \dfrac{-1}{a^2}$.
   Soient a un nombre réel non nul, et $h \neq 0$.
   $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = \dfrac{\dfrac{1}{a+h} - \dfrac{1}{a}}{h} = \dfrac{\dfrac{a-(a+h)}{a(a+h)}}{h} = \dfrac{\dfrac{-h}{a(a+h)}}{h} = \dfrac{-h}{a(a+h)} \times \dfrac{1}{h} = -\dfrac{1}{a(a+h)}.$
   Il apparaît donc que
   $$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} -\frac{1}{a(a+h)} = -\frac{1}{a^2}$$
Donc f est dérivable en tout réel a non nul, et pour tout $a \neq 0$, $f'(x) = -\dfrac{1}{a^2}$.
2. En déduire que la courbe de la fonction inverse admet en deux points une tangente parallèle à la droite d'équation $y = -\dfrac{1}{4}x + 3$ et préciser les abscisses de ces deux points.
   La tangente est parallèle à cette droite ssi elle a le même coefficient directeur $-\dfrac{1}{4}$.
   Or, le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse a est $f'(a)$.
   On résout $f'(x) = \dfrac{-1}{4}$.
   f est dérivable en tout réel $x \neq 0$, et pour tout $x \neq 0$, $f'(x) = \dfrac{-1}{x^2}$.
   Donc $\dfrac{-1}{x^2} = \dfrac{-1}{4}$, $x^2 = 4$, et donc ($x = -2$ ou $x = 2$).
La courbe de la fonction inverse admet des tangentes parallèles à la droite d'équation $y = -\dfrac{1}{4}x + 3$ aux points d'abscisses -2 et 2.