

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = -2x^2 + 3x - 1.$$

1. Mettre $f(x)$ sous forme canonique.

$$\begin{aligned} f(x) &= -2x^2 + 3x - 1 \\ &= -2\left(x^2 - \frac{3}{2}x\right) - 1 \\ &= -2\left[x^2 - 2 \times x \times \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2\right] - 1 \\ &= -2\left[\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16}\right] - 1 \\ &= -2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{9}{8} - 1 \\ &= -2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{8} \end{aligned}$$

2. Donner le tableau de variation de f . Justifier.

Comme le coefficient de x^2 est $a = -2 < 0$, la parabole est tournée vers le bas.

D'après la forme canonique de la question 1, le sommet S a pour coordonnées $\left(\frac{3}{4}; \frac{1}{8}\right)$.

Sinon, $S(\alpha; \beta)$ avec $\alpha = \frac{-b}{2a}$, et $\beta = \frac{-\Delta}{4a} = f(\alpha)$.

x	$-\infty$	$3/4$	$+\infty$
$f(x)$		$1/8$	

3. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4 \times (-2) \times (-1) = 1 > 0.$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 - 1}{-4} = 1.$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 + 1}{-4} = \frac{1}{2}.$$

Les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont $\frac{1}{2}$ et 1.

4. Donner le tableau de signe de f (justifier).

Le trinôme est du signe de a , (ici $a = -2 < 0$), à l'extérieur des racines.

x	$-\infty$	$1/2$	1	$+\infty$	
$f(x)$	-	0	+	0	-

5. On pose $g(x) = x - 5$. Étudier la position relative des courbes de f et g .

On étudie le signe de $f(x) - g(x)$ sur \mathbb{R} .

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= -2x^2 + 3x - 1 - (x - 5) \\ &= -2x^2 + 2x + 4 \end{aligned}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4 \times (-2) \times 4 = 36 > 0.$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 - 6}{-4} = 2.$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 + 6}{-4} = -1.$$

Le trinôme $(f - g)$ est du signe de a , (ici $a = -2 < 0$), à l'extérieur des racines.

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$		
$f(x) - g(x)$		-	0	+	0	-

Sur $] -\infty; -1] \cup [2; +\infty[$, \mathcal{C}_f est en-dessous de \mathcal{C}_g .
Sur $[-1; 2]$, \mathcal{C}_f est en-dessous de \mathcal{C}_g .

Bonus (1 point) : Déterminer l'expression d'une fonction f polynôme du second degré dont les racines sont -1 et 3 et dont le maximum est 2 .

Il existe un réel a tel que $f(x) = a(x+1)(x-3)$.

De plus, par symétrie de la parabole, l'abscisses du sommet est la moyenne des racines. $\alpha = \frac{-1+3}{2} = 1$.

Comme le maximum de f est 2 , le sommet a pour coordonnées $S(1; 2)$, soit $f(1) = 2$.

D'où $a(1+1)(1-3) = 2$, donc $-4a = 2$, et $a = -\frac{1}{2}$.

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -\frac{1}{2}(x+1)(x-3)$.

Interrogation n° 1
Réponses du sujet 2

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = 2x^2 + 5x - 3.$$

1. Mettre $f(x)$ sous forme canonique.

$$f(x) = 2 \left(x + \frac{5}{4} \right)^2 - \frac{49}{8}$$

2. Donner le tableau de variation de f . Justifier.

$S \left(-\frac{5}{4}; -\frac{49}{8} \right)$, et $a = 2 > 0$, la parabole est tournée

vers le haut.

x	$-\infty$	$-5/4$	$+\infty$
$f(x)$		$-49/8$	

3. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

$$\Delta = 49 > 0, S = \left\{ -3; \frac{1}{2} \right\}.$$

4. Donner le tableau de signe de f (justifier).

$a = 2 > 0$, f est du signe de a à l'extérieur des racines.

x	$-\infty$	-3	$1/2$	$+\infty$	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

5. On pose $g(x) = 3x + 1$. Étudier la position relative des courbes de f et g .

$$f(x) - g(x) = 2x^2 + 2x - 4$$

$$\Delta = 36 > 0.$$

$$x_1 = -2, \text{ et } x_2 = 1.$$

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$	
$f(x) - g(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Sur $]-\infty; -2] \cup [1; +\infty[$, \mathcal{C}_f est au-dessus de \mathcal{C}_g .
Sur $[-2; 1]$, \mathcal{C}_f est en-dessous de \mathcal{C}_g .