

2de. Correction du devoir maison n° 4

Exercice 1 (n° 5 page 47)

Montrer que $D = \sqrt{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{4} \times \sqrt{5} \times \sqrt{6} \times \sqrt{20}$ est un nombre entier.

On sait que pour tous réels a, b positifs ou nuls, $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.

$$\begin{aligned}
 D &= \sqrt{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{4} \times \sqrt{5} \times \sqrt{6} \times \sqrt{20} \\
 &= \sqrt{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 20} \\
 &= \sqrt{(2 \times 3 \times 6) \times (4 \times 5 \times 20)} \\
 &= \sqrt{6^2} \times \sqrt{20^2} \\
 &= 6 \times 20 \\
 &= 120
 \end{aligned}$$

$D = 120$, donc D est bien un nombre entier.

Exercice 2 (n° 23 page 50)

Écrire le nombre $F = 15^3 \times \frac{3^{-2}}{5^2} \times 45^{-2}$ sous la forme $3^n \times 5^p$ avec $n, p \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned}
 F &= 15^3 \times \frac{3^{-2}}{5^2} \times 45^{-2} \\
 &= (3 \times 5)^3 \times 3^{-2} \times 5^{-2} \times (3^2 \times 5)^{-2} \\
 &= 3^3 \times 5^3 \times 3^{-2} \times 5^{-2} \times 3^{-4} \times 5^{-2} \\
 &= 3^{3-2-4} \times 5^{3-2-2} \\
 &= 3^{-3} \times 5^{-1}
 \end{aligned}$$

Exercice 3 (n° 39 page 51)

$ABCD$ est un rectangle tel que $AB = \sqrt{200} - \sqrt{98}$ et $BC = \frac{\sqrt{350}}{\sqrt{7}} - \sqrt{8}$.

Montrer que $ABCD$ est un carré et calculer son aire.

1. Comme $ABCD$ est un rectangle, c'est un carré si et seulement si il a deux côtés consécutifs de même longueur.

On va montrer que $AB = BC$.

D'une part,

$$\begin{aligned}
 AB &= \sqrt{200} - \sqrt{98} = \sqrt{100 \times 2} - \sqrt{49 \times 2} \\
 AB &= \sqrt{100} \times \sqrt{2} - \sqrt{49} \times \sqrt{2} = 10\sqrt{2} - 7\sqrt{2} = 3\sqrt{2}.
 \end{aligned}$$

D'autre part,

$$BC = \frac{\sqrt{350}}{\sqrt{7}} - \sqrt{8} = \sqrt{\frac{7 \times 50}{7}} - \sqrt{4 \times 2} = \sqrt{50} - \sqrt{4} \times \sqrt{2}$$

$$BC = \sqrt{25 \times 2} - 2\sqrt{2} = \sqrt{25} \times \sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}.$$

Comme $AB = BC$, le rectangle $ABCD$ a deux côtés consécutifs de même longueur.
Donc $ABCD$ est un carré.

2. L'aire du carré est $AB^2 = (3\sqrt{2})^2 = 9 \times 2 = 18$.

Son aire est de 18 (unités d'aire).