

Corrigé du devoir maison n° 8

Exercice 1

Partie A

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x + x + 1$.

- g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x , $g'(x) = e^x + 1$.
Or, pour tout réel x , $e^x > 0$, donc $g'(x) > 0$, donc g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 1) = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$
 - $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 1) = -\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$
- Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires sur $\mathbb{R}$.
 g est continue, puisque dérivable, et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
De plus, $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.
Donc 0 appartient à $] \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) [$,
donc, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution, α , sur $\mathbb{R}$.
 - On a $g(-1, 28) \approx -0,002$, $g(-1, 27) \approx 0,011$ et $g(\alpha) = 0$,
donc $g(-1, 28) < g(\alpha) < g(-1, 27)$.
Or g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc $-1, 28 < \alpha < -1, 27$.
- g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $g(\alpha) = 0$, on en déduit le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
signe de $g(x)$		- 0 +	

Partie B

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{xe^x}{e^x + 1}$.

Notons $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

- On sait que $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x + 1 = 1$.
Par ailleurs, on sait que $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{xe^x}{e^x + 1} = \frac{0}{1} = 0$.
Donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$. Donc la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$.
- Pour tout réel x : $f(x) = \frac{xe^x}{e^x + 1} = \frac{xe^x \times e^{-x}}{(e^x + 1)e^{-x}} = \frac{xe^0}{e^0 + e^{-x}} = \frac{x}{1 + e^{-x}}$
 - On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + e^{-x}) = 1$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{1 + e^{-x}} = +\infty$,
donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
- f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables, et on a :

$$f'(x) = \frac{(e^x + xe^x)(e^x + 1) - xe^x \times e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^x(1 + x)(e^x + 1) - xe^x \times e^x}{(e^x + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^x[(1 + x)(e^x + 1) - xe^x]}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^x(e^x + 1 + xe^x + x - xe^x)}{(e^x + 1)^2}$$
Donc $f'(x) = \frac{e^x(e^x + 1 + x)}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^x g(x)}{(e^x + 1)^2}$
 - Pour tout réel x , $e^x > 0$ et $(e^x + 1)^2 > 0$, donc $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
signe de $f'(x)$		- +	
variations de f	0	$\searrow$ $f(\alpha)$ $\nearrow$	$+\infty$

- Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
On a $f(0) = 0$ et $f'(0) = \frac{1(1 + 1 + 0)}{(1 + 1)^2} = \frac{1}{2}$.

Donc T a pour équation $y = \frac{1}{2}(x - 0) + 0$, c'est à dire $y = \frac{1}{2}x$.

(b) Pour tout réel x , on a :

$$f(x) - \frac{1}{2}x = \frac{xe^x}{e^x + 1} - \frac{1}{2}x = \frac{2xe^x - (e^x + 1)x}{2(e^x + 1)} = \frac{xe^x - x}{2(e^x + 1)} = \frac{x(e^x - 1)}{2(e^x + 1)}.$$

Signe de $e^x - 1$:

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $e^0 = 1$, donc :

pour tout x de $] -\infty; 0[$, $e^x < 1$, donc $e^x - 1 < 0$

et pour tout x de $]0; +\infty[$, $e^x > 1$, donc $e^x - 1 > 0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x	$-$	0	$+$
$e^x - 1$	$-$	0	$+$
$2(e^x + 1)$	$+$	$ $	$+$
$f(x) - \frac{1}{2}x$	$+$	0	$+$

Pour tout x de $\mathbb{R} - \{0\}$, $f(x) - \frac{1}{2}x > 0$, donc $f(x) > \frac{1}{2}x$, donc $\mathcal{C}$ est au dessus de T .

$\mathcal{C}$ et T sont sécantes en $O(0, 0)$.

Exercice 2 (n° 133 p 119)

Soit f définie sur $[0, 5; 8]$ par $f(x) = 20(x - 1)e^{-0,5x}$.

1. Étudier le sens de variation de f .

La fonction f est dérivable sur $I = [0, 5; 8]$ par composée et produit de fonctions dérivables. Pour tout $x \in I$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 20 \times [1e^{-0,5x} + (x - 1) \times (-0,5)e^{-0,5x}] \\ &= 20 \times [1 - 0,5(x - 1)]e^{-0,5x} \\ &= (-10x + 30)e^{-0,5x} \end{aligned}$$

Comme une exponentielle est toujours strictement positive, $e^{-0,5x} > 0$.

Donc $f'(x)$ a le même signe que $(-10x + 30)$.

$-10x + 30$ s'annule pour $x = 3$.

x	$0, 5$	3	8
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$f(0, 5)$	$f(3)$	$f(8)$

Avec la calculatrice, $f(0, 5) \approx -7, 8$, $f(3) \approx 8, 9$, $f(8) \approx 2, 6$.

2. Dans cette question, $f(x)$ désigne le bénéfice (en milliers d'euros), pour une production de x centaines de bicyclettes (la production variant de 50 à 800 bicyclettes).

(a) Combien, au minimum, l'entreprise doit-elle produire de bicyclettes pour ne pas travailler à perte ?

L'entreprise fait des bénéfices lorsque $f(x) \geq 0$.

Or, $e^{-0,5x} > 0$. Donc $f(x) \geq 0$ si et seulement si $20(x - 1) \geq 0$, soit $x \geq 1$.

L'entreprise fait des bénéfices si elle produit au moins 100 bicyclettes.

(b) Comment réaliser un bénéfice maximal ?

D'après la question 1, le maximum de f est atteint pour $x = 3$.

L'entreprise fait un bénéfice maximal si elle produit 300 bicyclettes.

$f(3) \approx 8, 925$.

Le bénéfice maximal est de 8925 euros environ.