

BTS – Intégration

I Primitives

L'intégration est utile pour calculer une aire, un volume, un flux, une probabilité, les solutions d'une équation différentielle... C'est un outil mathématique fondamental.

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

On appelle primitive de f sur I toute fonction F dérivable sur I telle que $F' = f$

Exemple :

Une primitive de la fonction cos la fonction est sin car pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\sin'(x) = \cos(x)$.

Théorème

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I .

Propriété

Soit f une fonction admettant des primitives sur un intervalle I .

1. Si F est une primitive de f sur I , alors toutes les primitives de f sont les fonctions G définies par $G(x) = F(x) + k$, où k est une constante.
2. Soit $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Il existe une unique primitive G de f telle que $G(x_0) = y_0$.

Exemple :

Les primitives de la fonction cos sont les fonctions $x \mapsto \sin(x) + k$, avec $k \in \mathbb{R}$.

I.1 Primitives des fonctions usuelles

Fonction f	Une primitive F	Intervalle de validité
$f(x) = a, (a \in \mathbb{R})$	$F(x) =$	$\mathbb{R}$
$\heartsuit \quad f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$	$F(x) =$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) =$	$] - \infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) =$	$]0; +\infty[$
$f(x) = e^x$	$F(x) =$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x}$	$]0; +\infty[$
$f(x) = \cos x$	$F(x) =$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin x$	$F(x) =$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos(ax + b), a \neq 0$	$F(x) =$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin(ax + b), a \neq 0$	$F(x) =$	$\mathbb{R}$

I.2 Opérations sur les primitives

Propriété (admise)

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle sur I , de primitives respectives F et G .

1. Une primitive de $f + g$ est $F + G$.
2. Pour toute constante $k \in \mathbb{R}$, une primitive de kf est kF .

Propriété (composée)

Soit u une fonction dérivable sur I .

1. Une primitive de $u'e^u$ est ...
2. Si $u(x) > 0$ sur I , une primitive de $\frac{u'}{u}$ est ...
3. Une primitive de $u' \times u^n$ avec $n \geq 1$ est ...
4. Pour $n < -1$ et avec u ne s'annulant pas sur I , une primitive de $u' \times u^n$ est ...

II Intégration

Définition

Soient f une fonction définie sur un intervalle $[a; b]$, et F une primitive de f .

L'intégrale de a à b de f est $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$.

Remarque

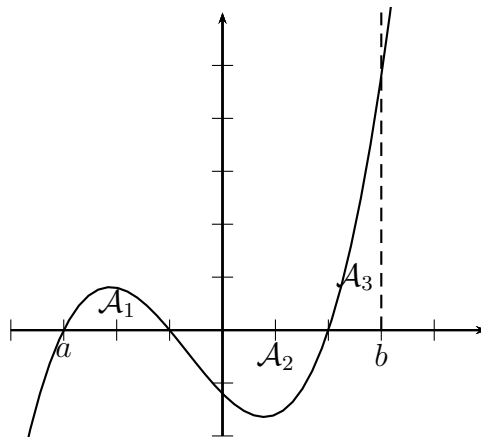
Dans les calculs, on utilise la notation $\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b$

Exercice 1

À l'aide d'une primitive, calculer l'intégrale $\int_1^2 x^2 - 3 dx$.

Remarque

En supposant que $a < b$, l'intégrale correspond à l'aire de la surface comprise entre la courbe de f et l'axe des abscisses pour x allant de a à b , comptée positivement lorsque f est positive et comptée négativement lorsque f est négative.



Sur cette illustration, $\int_a^b f(x) \, dx = \mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3$.

Propriété

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I , a, b, c trois réels de I , et k un réel quelconque.

1. $\int_a^a f(x) \, dx = 0$.

2. $\int_b^a f(x) \, dx = -\int_a^b f(x) \, dx$.

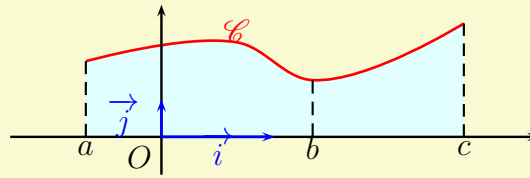
3. Linéarité de l'intégrale :

(a) $\int_a^b k f(x) \, dx = k \int_a^b f(x) \, dx$.

(b) $\int_a^b (f(x) + g(x)) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \, dx$.

4. Relation de Chasles :

$$\int_a^b f(x) \, dx + \int_b^c f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx.$$



5. Positivité de l'intégrale :

Si $a < b$ et pour tout $x \in [a; b]$ $f(x) \geq 0$, alors $\int_a^b f(x) \, dx \geq 0$.

6. Croissance de l'intégrale.

Si pour tout $x \in [a; b]$, $f(x) \leq g(x)$, alors $\int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b g(x) \, dx$.

III Applications du calcul intégral

Définition (valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle)

Pour toute fonction f continue sur un intervalle $[a; b]$, on appelle valeur moyenne de f sur $[a; b]$

le réel $m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx$.

Remarque

Cette égalité s'écrit aussi $m(b-a) = \int_a^b f(x) \, dx$.

Ainsi, pour une fonction positive, m est la hauteur du rectangle de largeur $(b-a)$ qui a la même aire que l'aire $\int_a^b f(x) \, dx$.

Dans le cas général, la valeur moyenne de f est la valeur de la fonction constante qui a la même intégrale que f .

Exemple : Calculons la valeur moyenne de la fonction carré sur $[0; 2]$.

$$\begin{aligned}
 m &= \frac{1}{2-0} \int_0^2 t^2 \, dt \\
 &= \frac{1}{2} \times \left[\frac{1}{3} t^3 \right]_0^2 \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{2^3}{3} - 0 \right) \\
 &= \frac{4}{3}
 \end{aligned}$$

L'aire sous la courbe de f sur $[0; 2]$ est égale à l'aire du rectangle de hauteur $\frac{4}{3}$ et de largeur 2.

