2de. Correction du devoir maison n° 7

Exercice 1

Résoudre les inéquations suivantes. Donner l'ensemble solution sous forme d'intervalle ou de réunion d'intervalles.

1. $-\frac{2}{3}x - 5 < x + \frac{1}{2}$
   C'est une inéquation du premier degré. On isole l'inconnue x.
   $-\frac{2}{3}x - 5 < x + \frac{1}{2}$
   ssi $-\frac{5}{3}x < \frac{11}{2}$
   ssi $x > -\frac{11}{2} \times \frac{3}{5}$ (on a divisé les 2 membres par $-\frac{5}{3} < 0$, l'inégalité change de sens)
   ssi $x > -3,3$.
   $\boxed{S =]-3,3; +\infty[}$.
2. $(-2x + 10)(x + 4) > 0$.
   Valeurs clés :
   $-2x + 10 = 0$ ssi $x = 5$.
   $x + 4 = 0$ ssi $x = -4$

x	$-\infty$		-4		5		$+\infty$
$-2x+10$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
$(-2x+10)(x+4)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

   $\boxed{S =]-4; 5[}$.

3. $\frac{2x+1}{(x-6)(-3x+12)} \geqslant 0$.
   Valeurs clés :
   $2x + 1 = 0$ ssi $x = -\frac{1}{2}$.
   $x - 6 = 0$ ssi $x = 6$ (valeur interdite)
   $-3x + 12 = 0$ ssi $x = 4$ (valeur interdite).

x	$-\infty$		$-1/2$		4		6		$+\infty$
$2x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-6$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$-3x+12$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$\frac{2x+1}{(x-6)(-3x+12)}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$-$	

$\boxed{S = \left]-\infty ; -\frac{1}{2}\right] \cup]4;6[.}$

4. $\dfrac{3x+7}{-x+4} \geqslant 5.$

$\dfrac{3x+7}{-x+4} \geqslant 5$

ssi $\dfrac{3x+7}{-x+4} - \dfrac{5(-x+4)}{-x+4} \geqslant 0,$

ssi $\dfrac{3x+7+5x-20}{-x+4} \geqslant 0,$

ssi $\dfrac{8x-13}{-x+4} \geqslant 0.$

Valeurs clés :

$8x - 13 = 0$ ssi $x = \dfrac{13}{8}.$ $\qquad -x+4 = 0$ ssi $x = 4$ (valeur interdite).

x	$-\infty$		$13/8$		4		$+\infty$
$8x-13$		$-$	0	$+$		$+$	
$-x+4$		$+$		$+$	0	$-$	
$\dfrac{8x-13}{-x+4}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

$\boxed{S = \left[\frac{13}{8} ; 4\right[.}$

Exercice 2

1. Trouver tous les nombres réels x et y tels que $x^2 - y^2 = 77$ et $x - y = 11$.
   Comme $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$, et $x - y = 11$, on obtient $(x+y) \times 11 = 77$, donc $x + y = 7$.
   De plus, $x - y = 11$, d'où, en additonnant ces deux équations, $2x = 18$, et donc $x = 9$.
   Enfin, comme $x - y = 11$, il vient $y = x - 11 = 9 - 11 = -2$.
   On vérifie facilement que ce couple $(9; -2)$ convient, et c'est donc la seule solution.
2. Le nombre $1 + \sqrt{5}$ est-il solution de l'équation $x^3 - x^2 - 6x - 4 = 0$?
   $(1+\sqrt{5})^2 = 1 + 2\sqrt{5} + 5 = 6 + 2\sqrt{5}$.
   Donc $(1+\sqrt{5})^3 = (6+2\sqrt{5})(1+\sqrt{5}) = 6 + 6\sqrt{5} + 2\sqrt{5} + 2 \times 5 = 16 + 8\sqrt{5}$.

$$\begin{aligned}
f(1+\sqrt{5}) &= (1+\sqrt{5})^3 - (1+\sqrt{5})^2 - 6(1+\sqrt{5}) - 4 \\
&= 16 + 8\sqrt{5} - (6 + 2\sqrt{5}) - 6 - 6\sqrt{5} - 4 \\
&= 16 - 6 - 6 - 4 + 8\sqrt{5} - 2\sqrt{5} - 6\sqrt{5} \\
&= 0
\end{aligned}$$

   L'affirmation est vraie.