Notions de logique

I Assertions et connecteurs logiques

Définition
Une assertion est un énoncé mathématique auquel on attribue l'une des deux valeurs logiques : le vrai (V) ou le faux (F).

Exemple :
L'assertion "$1+1=2$" est vraie.
L'assertion "$2+2=5$" est fausse.
Les propriétés, théorèmes sont des assertions vraies.

Définition
Le quantificateur universel, qui signifie "pour tout" , est noté $\forall$.
Le quantificateur existentiel, qui signifie "il existe", est noté $\exists$.

Exercice 1
Traduire en langage mathématique (avec des quantificateurs) :

1. "Un carré est toujours positif".
2. "L'équation $\dfrac{1}{x} = 3$ a au moins une solution réelle".
3. "Il existe au moins deux réels dont la somme est égale au produit".
4. "La somme de deux entiers relatifs reste un entier relatif".
5. "Tout nombre réel peut être encadré (au sens large) par deux entiers consécutifs".

Définition
Il existe 5 connecteurs logiques, à la base de tout raisonnement mathématique :

- Négation (non) : à toute assertion $\mathcal{A}$, on peut associer sa négation, notée (non $\mathcal{A}$).
  (non $\mathcal{A}$) est vraie si et seulement si $\mathcal{A}$ est fausse.
- Disjonction (ou) :
  L'assertion ($\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}$) est vraie lorsque au moins l'une des assertions $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ est vraie.
- Conjonction (et) :
  L'assertion ($\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$) est vraie lorsque les deux assertions $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont vraies.
- Implication ($\Rightarrow$) :
  ($\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$) est vraie si l'assertion (non $\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}$) est vraie.
- Équivalence ($\Leftrightarrow$) :
  ($\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$) est vraie si les assertions ($\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$) et ($\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}$) sont vraies.

Remarque

- ($\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$) s'écrit aussi "Si $\mathcal{A}$ (vraie), alors $\mathcal{B}$ (vraie)".
- ($\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$) s'écrit aussi " $\mathcal{A}$ (vraie) si et seulement si $\mathcal{B}$ (vraie)".
- Le "ou" mathématique n'est pas exclusif :
  si les assertions $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont toutes les deux vraies, alors l'assertion ($\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}$) est vraie.

II Implication, condition nécéssaire, condition suffisante

Une implication est une phrase du type : "Si $\mathcal{A}$, alors $\mathcal{B}$".

Propriété
Les formulations suivantes sont équivalentes :

- Si $\mathcal{A}$, alors $\mathcal{B}$,
- $\mathcal{A}$ implique $\mathcal{B}$ ($\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$),
- $\mathcal{A}$ est une condition suffisante pour que $\mathcal{B}$ soit réalisé,
- $\mathcal{B}$ est une condition nécessaire pour que $\mathcal{A}$ soit réalisé.

Exercice 2
On considère l'implication (vraie) : Si $x \in [1;4]$, alors $x \geqslant 0$.
Compléter :
Pour que ..., il est suffisant que ...
Pour que ..., il est nécessaire que ...

Exercice 3
Si l'on veut montrer que $ABCD$ est un parallélogramme, on cherche des conditions suffisantes. Compléter avec des conditions suffisantes.
Si ..., alors $ABCD$ est un parallélogramme.
Si ..., alors $ABCD$ est un losange.
Pour qu'un parallélogramme soit un rectangle, il suffit ...
Pour qu'un parallélogramme soit un losange, il suffit ...

III Réciproque d'une implication

Définition
La réciproque de l'implication $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$ est l'implication $(\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A})$.

Remarque
Une réciproque peut être vraie ou fausse (on ne peut rien dire en général).

Exemple :
Le théorème de Pythagore :
....
La réciproque du théorème de Pythagore.
....
Le théorème de Pythagore et sa réciproque sont vrais.

Exercice 4
Soit $x \in \mathbb{R}$. L'implication $x > 3 \Rightarrow x^2 > 9$ est vraie.

1. Formuler sa réciproque.
2. Étudier si cette réciproque est vraie ou fausse.

Exercice 5
Étudier la réciproque des implications suivantes :

1. Si un quadrilatère est un losange, alors ses diagonales sont perpendiculaires.
2. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $(a \in \mathbb{N}) \Rightarrow (a^2 \in \mathbb{N})$.

IV Négation d'une assertion

Exercice 6
Écrire les négations des assertions suivantes :

1. "Personne n'a obtenu 20/20 au dernier contrôle de mathématiques".
2. "Pour arriver dans cette classe, il fallait être beau ou intelligent".
3. "Il existe des élèves de cette classe qui n'aiment ni les maths, ni la physique".
4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 > 1$.
5. $\forall x \in \mathbb{R},\ (x^2 = 1) \Rightarrow (x = 1)$.

Plus généralement,

Propriété

1. non $(\mathcal{A}$ et $\mathcal{B})$ équivaut à (non $\mathcal{A}$) ou (non $\mathcal{B}$).
2. non $(\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B})$ équivaut à (non $\mathcal{A}$) et (non $\mathcal{B}$).
3. non $(\forall x, \mathcal{A}(x))$ équivaut à $\exists x$, non $\mathcal{A}(x)$.
4. non $(\exists x, \mathcal{A}(x))$ équivaut à $\forall x$, non $\mathcal{A}(x)$.
5. non$(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$ équivaut à $(\mathcal{A}$ et non $\mathcal{B})$.

Exercice 7
Pour qu'un nombre réel soit supérieur ou égal à 1, il suffit que son carré soit supérieur ou égal à 1.

1. Traduire cette phrase en langage mathématique.
2. Est-elle vraie ou fausse ? Justifier.

V Quelques modes de raisonnement

V.1 Démontrer à l'aide d'un contre-exemple

Rappel : non $(\forall x, \mathcal{A}(x))$ équivaut à $\exists x$, non $\mathcal{A}(x)$.
Pour montrer qu'une propriété à caractère universel n'est pas toujours vraie, il suffit d'exhiber un contre-exemple, c'est-à-dire un cas pour lequel elle n'est pas vraie.

Exercice 8
Montrer à l'aide d'un contre-exemple que les assertions suivantes sont fausses :

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geqslant x$.
- Pour tout $x \neq 0$, $x^2 \geqslant \dfrac{1}{x}$.
- Pour tout $x \in [-3; 4]$, $x^2 \in [9; 16]$.
- Pour tous réels a et b, $(a+b)^2 = a^2 + b^2$.
- Pour tous nombres a et b positifs ou nuls, $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$.
- Pour tous réels a et b, avec b différent de 0 et -1, $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a+1}{b+1}$.

V.2 Démonstration par contraposée

Définition (et théorème)
La contraposée de $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$ est (non $\mathcal{B} \Rightarrow$ non $\mathcal{A}$).
Une implication et sa contraposée sont équivalentes.

Exemple :
Le théorème de Pythagore est :
....
Sa contraposée est :
....

Exercice 9
Soit ABC un triangle tel que $AB = \sqrt{6}$, $BC = 2$ et $AC = 3$. ABC est-il rectangle ?

Exercice 10
On admet l'assertion "s'il pleut, alors je prends mon parapluie".

1. Aujourd'hui, il fait beau (il ne pleut pas).
   Quelle proposition est correcte ?
   1. J'ai un parapluie 2. Je n'ai pas de parapluie 3. On ne peut pas savoir.
2. Aujourd'hui, il pleut.
   Quelle proposition est correcte ?
   1. J'ai un parapluie 2. Je n'ai pas de parapluie 3. On ne peut pas savoir.
3. Aujourd'hui, je prends mon parapluie.
   Quelle proposition est correcte ?
   1. Il pleut 2. Il ne pleut pas 3. On ne peut pas savoir.
4. Aujourd'hui, je ne prends pas mon parapluie.
   Quelle proposition est correcte ?
   1. Il pleut 2. Il ne pleut pas 3. On ne peut pas savoir.

V.3 Démonstration par l'absurde

Pour montrer qu'une propriété est vraie, on commence par supposer qu'elle est fausse, puis on montre par une suite d'implications que cela conduit à une contradiction.

Exemples :
$\sqrt{2}$ est irrationnel.
$\dfrac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal (cours chapitre 1)

V.4 Disjonction des cas

Exercice 11
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $|x-2| + 1 > 6|x|$.

Exercice 12
Déterminer tous les triplets de nombres entiers positifs $(a; b; c)$ tels que $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = 1$.

V.5 Double inclusion pour montrer l'égalité de deux ensembles

Propriété
Soient A et B deux ensembles.
$(A = B) \Leftrightarrow (A \subset B$ et $B \subset A)$.

Exercice 13 (médiatrice d'un segment)
Soient A et B deux points distincts du plan. On note I le milieu de $[AB]$.
Montrer que la droite perpendiculaire à $[AB]$ et passant par son milieu est l'ensemble des points équidistants de A et de B.

VI Exercices

Exercice 14 (V/F)

1. Il existe des réels a et b tels que $(a+b)^2 = a^2 + b^2$.
2. Il existe des réels a et b tels que $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a+1}{b+1}$.
3. Pour tout $x \neq 0$, $x + \dfrac{1}{x} > 0$.

Exercice 15
Soient a et b deux réels. Montrer que $(a + b > 1) \Rightarrow (a > \dfrac{1}{2}$ ou $b > \dfrac{1}{2})$:

1. Par disjonction des cas.
2. Par contraposée.

Exercice 16
Soient $a,\ b \in \mathbb{R}$.
Déterminer une condition nécéssaire et suffisante à l'assertion suivante : "$(a+b)^2 = a^2 + b^2$."

Exercice 17 ($\sqrt{2}$ est irrationnel – raisonnement par l'absurde)
Partie 1
Soit n un entier naturel.

1. Montrer que si n^2 est pair alors n est pair. Raisonner par contraposée.
2. Montrer que si n^2 est impair, alors n est impair.

Partie 2
On va montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.
On raisonne par l'absurde.
Supposons que l'on puisse écrire $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$ avec a et b entiers $(b \neq 0)$, et que la fraction soit sous forme irréductible.

1. Montrer que $a^2 = 2b^2$.
2. En déduire que a et b sont pairs.
3. Mettre en évidence une contradiction et conclure.