

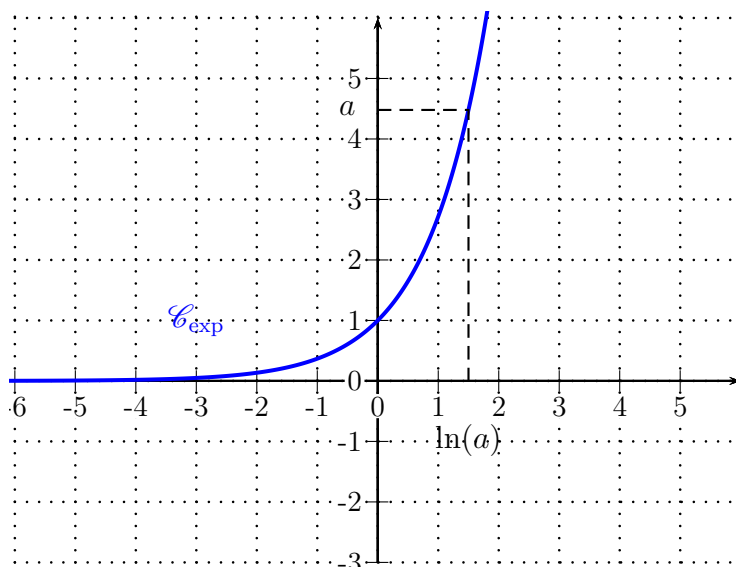
Term STL spécialité

Logarithme népérien

I Définition et premières propriétés

La fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, avec le tableau de variation :

x	$-\infty$	$+\infty$
e^x	0	$+\infty$



Pour tout $a > 0$, l'équation $e^x = a$ admet une unique solution.

Définition

1. Soit $a > 0$. On appelle logarithme népérien de a et on note $\ln(a)$ l'unique solution de l'équation $e^x = a$.

Ainsi, pour tout $a > 0$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$e^x = a \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln(a)$$

2. La fonction logarithme népérien, notée $\ln$, est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ qui à tout $a > 0$ associe le nombre $\ln(a)$.

Exemple :

Comme $e^0 = 1$, on a $\ln(1) = 0$.

Comme $e^1 = e$, on a $\ln(e) = 1$.

Propriété

1. Pour tout $a > 0$, $e^{\ln(a)} = a$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln(e^x) = x$.

Exercice 1

1. Calculer

$$A = 2 + 3 \ln(e) - \ln 1 \text{ et } B = 8 - \ln(1) - (2 \ln(e))^2$$

2. Résoudre

$$e^x = 4$$

$$e^{3x} - 1 = 9$$

$$\ln(x) = 5$$

$$\ln(x) = -2$$

Remarque (lien avec le logarithme décimal)

Pour tout $x \in]0; +\infty[$, $\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$

II Propriétés algébriques

Théorème (propriété fondamentale des logarithmes)

Pour tous a et b strictement positifs,

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b),$$

Démonstration

Soient $a > 0$ et $b > 0$.

Alors $e^{\ln(ab)} = ab$ et $e^{\ln(a)+\ln(b)} = e^{\ln(a)} \times e^{\ln(b)} = a \times b$.

Donc $e^{\ln(ab)} = e^{\ln(a)+\ln(b)}$, d'où $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$. □

Propriété

Pour tous a et b strictement positifs

1. $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a),$

2. $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b),$

3. $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln(a).$

4. Pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, $\ln(a^n) = n \ln(a)$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln(a^x) = x \ln(a)$.

Remarque : la fonction logarithme népérien transforme un produit en une somme, et donc une division en soustraction, et une puissance en une multiplication.

Exercice 2

Écrire sous forme d'un seul logarithme :

$$a = \ln(4) + \ln(5), b = \ln(2) - \ln(3), c = 2 \ln(7) + \ln(0.3x), \text{ et } d = \ln(3) + 5$$

Exercice 3

Exprimer en fonction de $\ln 3$.

$$A = \ln \frac{1}{9}$$

$$B = \ln 63 - \ln 7$$

$$C = 4 \ln 6 - \ln 16$$

$$D = \ln(\sqrt{27})$$

III Étude de la fonction logarithme népérien

Propriété

1. La fonction $\ln$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et pour tout $x > 0$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.
2. La fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.
3. On rappelle que $\ln(1) = 0$. Le signe de $\ln(x)$ est :

x	0	1	$+\infty$	
$\ln(x)$	$\parallel$	$-$	0	$+$

Démonstration

On admet que la fonction $\ln$ est dérivable sur $]0; +\infty[$.

On pose, pour tout $x > 0$, $f(x) = e^{\ln x}$.

f est de la forme e^u , qui se dérive en $u'e^u$.

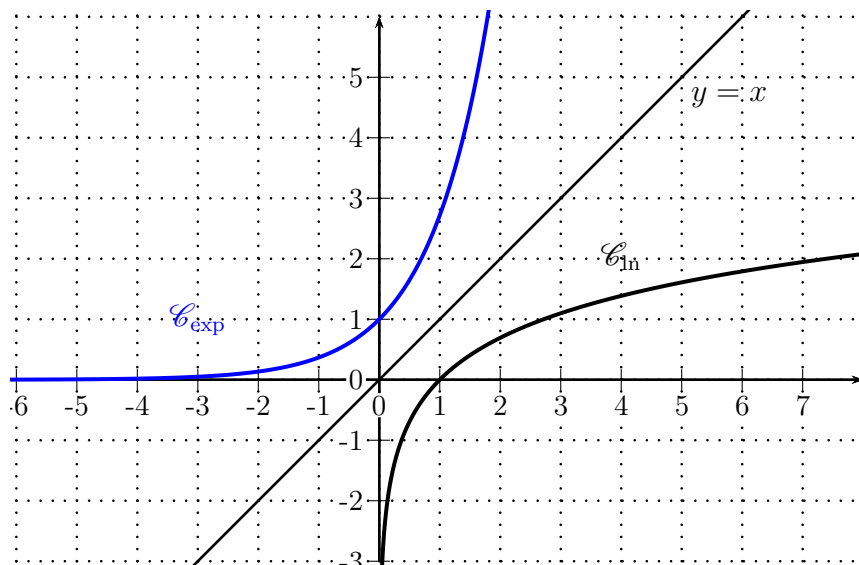
Donc $f'(x) = \ln'(x) \times e^{\ln x} = \ln'(x) \times x$.

Or, on sait que $f(x) = e^{\ln x} = x$, donc $f'(x) = 1$.

Ainsi, $\ln'(x) \times x = 1$, et $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

Ensuite, pour tout $x > 0$, $\ln'(x) = \frac{1}{x} > 0$, donc la fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$. $\square$

Courbe représentative



Remarque

Les courbes des fonctions $\ln$ et $\exp$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Exercice 4

Calculer la dérivée des fonctions puis déterminer leurs variations.

1. f est définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = 2 \ln x - x$.
2. g est définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \ln x - \frac{1}{2}x^2 + 1$.

Propriété (Équations et inéquations avec ln)

Pour tous réels a et b strictement positifs,

1. $\ln(a) = \ln(b)$ équivaut à $a = b$.
2. $\ln(a) < \ln(b)$ équivaut à $a < b$.

Exercice 5

Résoudre les équations et inéquations suivantes.

1. $e^{-x} = 10$ $e^{x+5} = 3$ $2e^x - 3 = 7$ $e^{4+5x} \leq 7$
2. Résoudre dans $]0; +\infty[$
 $\ln(x) = 3$ $4\ln(x) - 7 = 3$ $7\ln(x) + 3 < 4$ $6 - \ln(x) \leq 8$
3. Déterminer l'ensemble de définition de l'équation (ou inéquation) puis la résoudre.
 $\ln(2x + 1) = 1$ $\ln(-x + 3) \leq 0$ $\ln(4 - x) - 3 \leq 0$

Propriété (limites de la fonction ln)

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$, et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$

x	0	1	$+\infty$
$\ln'(x) = \frac{1}{x}$		+	+
$\ln x$	$-\infty$	0	$+\infty$

IV Logarithme d'une fonction**Théorème (Dérivée de $\ln u$)**

Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur I .

Alors la fonction $\ln u$ est dérivable sur I et sa dérivée est $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$.

Conséquence

Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur I .

Alors u et $\ln u$ ont même sens de variation sur I .

Exercice 6

On pose $f(x) = \ln(2x + 1)$.

1. Résoudre $2x + 1 > 0$. C'est l'ensemble de définition de f .
2. Calculer $f'(x)$ pour tout $x > -\frac{1}{2}$.