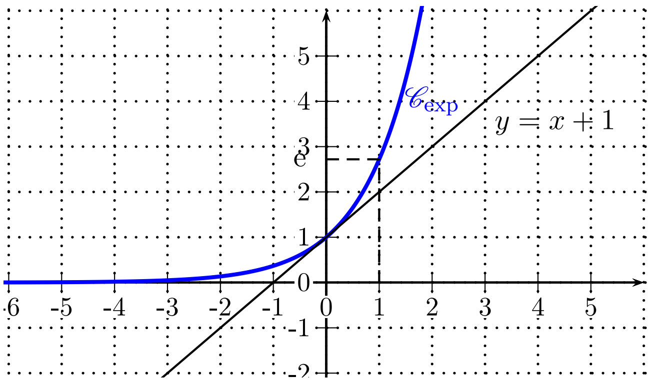
Terminale STL. Spécialité
Chapitre 2 : La fonction exponentielle de base e

I Définition de la fonction exponentielle de base e

Définition
Soit a un réel, $a > 0$.
On admet qu'il existe une unique fonction exponentielle $x \mapsto a^x$ dont la courbe admet une tangente en 0 de pente égale à 1.
Elle s'appelle la fonction exponentielle de base e. On la note $f : x \mapsto \mathrm{e}^x$.

Remarque
La fonction exponentielle de base e s'appelle simplement la fonction exponentielle.
Le nombre e, qui est irrationnel, s'appelle nombre d'Euler (notation datant de 1728).
On a $\mathrm{e} \approx 2,718$.
La fonction exponentielle se note parfois exp : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) = \mathrm{e}^x$.



Remarque
De façon générale, le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a est le nombre dérivé $f'(a)$.
La fonction exponentielle est donc dérivable en 0 et le nombre dérivé en 0 est égal à 1, soit $\exp'(0) = 1$.
La tangente au point d'abscisse 0 a pour équation $y = x + 1$.

II Propriétés de la fonction exponentielle

Propriété
1. $\mathrm{e}^0 = 1$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x > 0$.
3. Pour tous réels a et b, et pour tout entier relatif n :
   (a) $\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a \times \mathrm{e}^b$.
   (b) $\mathrm{e}^{-a} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^a}$.
   (c) $\mathrm{e}^{a-b} = \dfrac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b}$.
   (d) $(\mathrm{e}^a)^n = \mathrm{e}^{na}$.

Exercice 1
Écrire sous la forme d'une seule exponentielle les expressions :
$A = \mathrm{e}^{3x}\mathrm{e}^{-4x+2} = \dots$
$B = (\mathrm{e}^{x+1})^2 = \dots$
$C = \dfrac{\mathrm{e}^{5x}}{\mathrm{e}^{2x+1}} = \dots$

On sait que $e^1 = e \approx 2,718$. Comme $e > 1$:

Propriété

1. La fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. $e^a = e^b$ équivaut à $a = b$.
3. $e^a < e^b$ équivaut à $a < b$.

Exercice 2

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{(x^2)} = e^4$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^{2x+1} < e^{3x-3}$.

III Étude de la fontion exponentielle

Propriété

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée est elle-même.
Si $f(x) = e^x$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = e^x$.

Exercice 3 (démonstration de la propriété)

Soit $a \in \mathbb{R}$, et h un réel non nul.

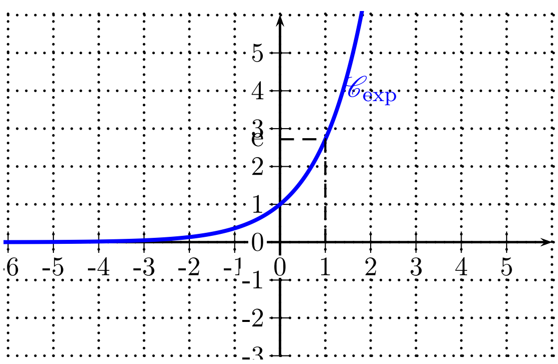
1. Rappeler la définition du nombre dérivé $f'(a)$ comme limite du taux d'accroissement.
2. Quel est le nombre dérivé de la fonction exponentielle en 0 ?
3. Justifier que $\dfrac{e^{a+h} - e^a}{h} = e^a \times \dfrac{e^h - 1}{h}$.
4. En déduire que la fonction exponentielle est dérivable en tout réel a et que $\exp'(a) = \exp(a)$.

Propriété

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.

On a vu que la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\exp'$		$+$	1	$+$	
$\exp$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$



Remarque

Comme $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$, on dit que l'axe des abscisses (d'équation $y = 0$) est asymptote horizontale à la courbe de $x \mapsto e^x$ en $-\infty$.

IV Fonctions $x \mapsto \mathrm{e}^{kx}$

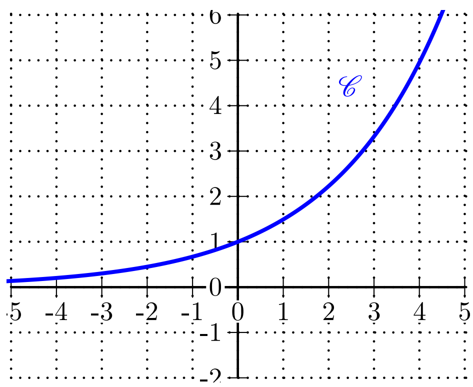
Propriété
Soit $k \in \mathbb{R}$.
La fonction f définie par $f(x) = \mathrm{e}^{kx}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = k\mathrm{e}^{kx}$

Exercice 4
Dériver les fonctions suivantes :

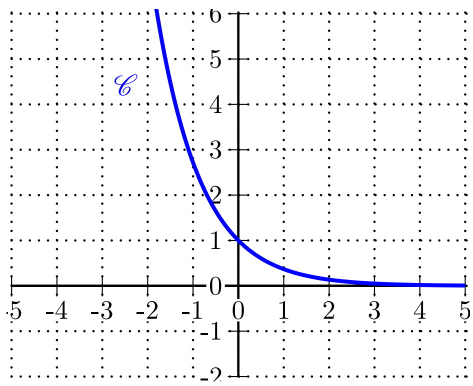
1. $f(x) = \mathrm{e}^{10x}$
2. $g(x) = \mathrm{e}^{-3x}$
3. $h(x) = \mathrm{e}^{-x}$

Propriété

1. Si $k > 0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{kx} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{kx} = 0$.
2. Si $k < 0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{kx} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{kx} = +\infty$.



$k = 0.4$ Fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{0,4x}$



$k = -1$ Fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$

V Limites à l'infini des fonctions polynômes

Exercice 5
On considère les fonctions polynômes suivantes :
$A(x) = 0,5x^5 - 3x^4 + x - 1$,
$B(x) = -2x^3 + 5x^2 + 44$.

1. Le terme de plus haut de degré de A est ...
2. Le terme de plus haut de degré de B est ...
3. À l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel, émettre des conjectures sur les limites à l'infini des fonctions :

	$A(x)$	$0,5x^5$	$B(x)$	$-2x^3$
Conjecture sur la limite lorsque $x \to +\infty$				
Conjecture sur la limite lorsque $x \to -\infty$				

Propriété
La limite en $-\infty$ ou $+\infty$ d'une fonction polynôme est égale à la limite de son terme de plus haut degré.
Elle est toujours égale à $+\infty$ ou $-\infty$ suivant le signe de ce terme.

Exemple :
Soit $f(x) = -x^3 + 5x + 12$. Son terme de plus haut degré est $-x^3$.
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} -x^3 = +\infty$.
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} -x^3 = -\infty$.

VI Opérations sur les limites et croissances comparées

Tous les résultats suivants sont admis.
f et g sont des fonctions qui admettent une limite en a, (a désigne un nombre réel, ou $+\infty$, ou $-\infty$).
ℓ et ℓ' sont des nombres réels.

VI.1 limite d'une somme

Si f a pour limite en a	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Si g a pour limite en a	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Alors $f+g$ a pour limite en a						

Exercice 6

1. Déterminer $\lim\limits_{+\infty} 2x + \mathrm{e}^x$
2. Déterminer $\lim\limits_{+\infty} -11 + \mathrm{e}^{-3x}$

VI.2 limite d'un produit

Si f a pour limite en a	ℓ	$\ell > 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
Si g a pour limite en a	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
Alors $f \times g$ a pour limite en a									

Exercice 7

1. Déterminer $\lim\limits_{+\infty} -3x^2\mathrm{e}^{4x}$
2. Déterminer $\lim\limits_{-\infty} x(3 + \mathrm{e}^x)$

VI.3 limite d'un quotient

VI.3.a cas où la limite de g n'est pas nulle

Si f a pour limite en a	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
Si g a pour limite en a	$\ell' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$+\infty$ ou $-\infty$
Alors $\dfrac{f}{g}$ a pour limite en a							

VI.3.b cas où la limite de g est nulle

Si f a pour limite en a	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	0
Si g a pour limite en a	0 en restant positive	0 en restant négative	0 en restant positive	0 en restant négative	0
Alors $\dfrac{f}{g}$ a pour limite en a					

Exercice 8

1. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-4}{\mathrm{e}^x}$
2. Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3}{\mathrm{e}^x}$

Remarque (récapitulatif des formes indéterminées)
Les 4 formes indéterminées sont donc : $+\infty - \infty$, $\pm\infty \times 0$, $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$, et $\dfrac{0}{0}$.
Dans tous les autres cas, on peut conclure directement avec les opérations.

Théorème (croissances comparées des fonctions e^x et x^n)
Soit n un entier naturel non nul.

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty$.
2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^n\mathrm{e}^{-x} = 0$.

VII Exponentielle d'une fonction

Propriété (dérivée de e^u)
Si u est dérivable sur un intervalle I, alors la fonction e^u est dérivable sur I et $(\mathrm{e}^u)' = u'\mathrm{e}^u$.

Exercice 9
Dériver la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \mathrm{e}^{x^2+5}$.

Remarque
Une primitive de $u'\mathrm{e}^u$ est e^u.

Exercice 10
Donner une primitive de $f(x) = \mathrm{e}^{-4x+1}$.
En déduire la valeur exacte de $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-4x+1}\,\mathrm{d}x$.