

Chapitre 6 : Trigonométrie

I Le cercle trigonométrique

Remarque

L'ensemble des nombres entiers relatifs (positifs ou négatifs) se note $\mathbb{Z}$.

$$\mathbb{Z} = \{\dots; -2; -1; 0; 1; 2; \dots\}.$$

On se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

On note I et J les points tels que $\vec{OI} = \vec{i}$ et $\vec{OJ} = \vec{j}$.

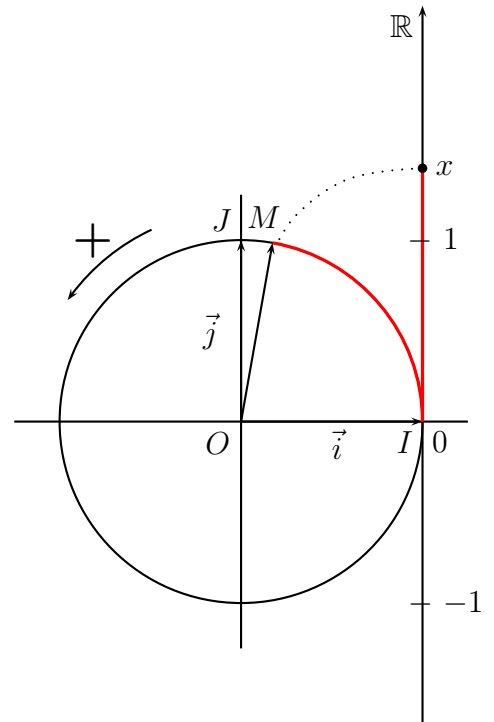
Définition

Le cercle trigonométrique est le cercle de centre O et de rayon 1, pour lequel on a choisi pour sens direct le sens inverse des aiguilles d'une montre.

On enroule l'axe gradué des nombres réels sur le cercle en plaçant l'origine des réels en I .

Alors, à tout nombre réel x correspond un unique point M sur le cercle.

On dit que M est l'image de x sur le cercle.



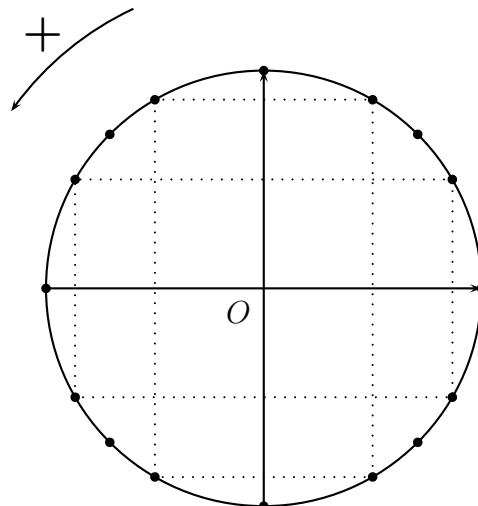
Remarque

Le cercle trigonométrique a pour rayon 1, son périmètre est donc ...

Exercice 1

Placer les images des réels suivants sur le cercle trigonométrique :

1. $0, \pi, 2\pi, 3\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, -\pi, -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}.$
2. $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}.$



Propriété

Deux nombres réels ont la même image sur le cercle trigonométrique ssi ...

Les réels x et x' ont la même image ssi il existe ...

Exercice 2

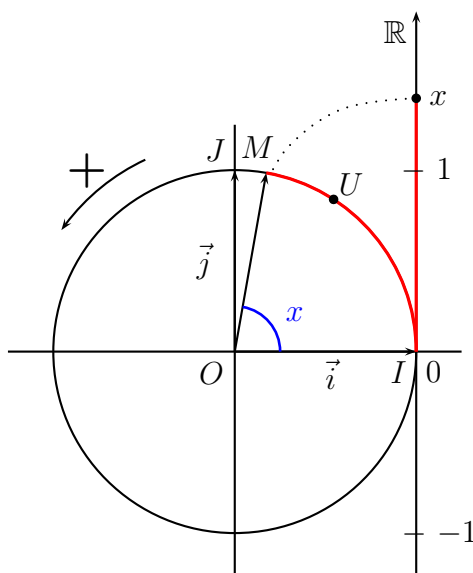
Les réels suivants ont-ils la même image sur le cercle ?

1. $a = 13\pi$ et $b = 4\pi$.
2. $a = \frac{5\pi}{4}$ et $b = \frac{-19\pi}{4}$.

Définition

Soit U l'image du nombre 1 sur le cercle trigonométrique.

Un radian est la mesure de l'angle géométrique $\widehat{IOU}$ interceptant un arc de cercle de longueur 1 sur le cercle trigonométrique.



Remarque

1. Lorsque $x \in [0; \pi]$, la longueur x de l'arc de cercle $\widehat{OM}$ correspond à la mesure en radian de l'angle $\widehat{IOM}$.
2. Correspondance degré - radian

Mesure en degrés	360	180	90	60	45	30	20
Mesure en radians							

II Trigonométrie

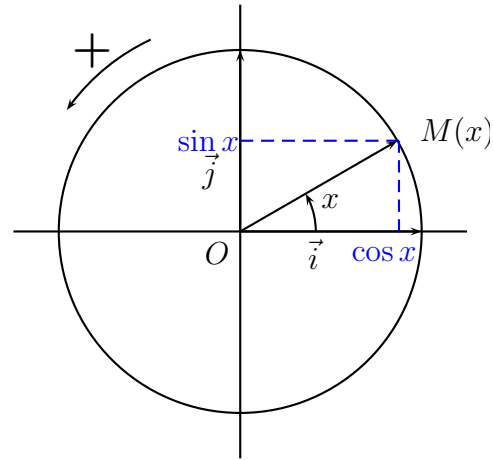
II.1 Cosinus et sinus d'un réel

Définition

Soit $x \in \mathbb{R}$. Notons $M(x)$ l'image de x sur le cercle trigonométrique.

Le cosinus de x est l'abscisse de M dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$. On le note $\cos x$.

Le sinus de x est l'ordonnée de M dans $(O; \vec{i}; \vec{j})$. On le note $\sin x$.



Propriété (conséquences immédiates)

Pour tout x réel, on a :

- $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$.
- pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

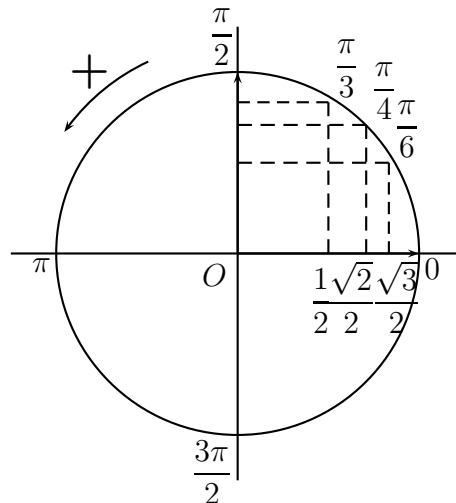
$$\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$$

$$\sin(x + 2k\pi) = \sin(x).$$

- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

Propriété (valeurs remarquables)

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0



Démonstration

On démontre $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, et $\cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

— Cosinus et sinus de $\frac{\pi}{3}$.

Soit A l'image de $\frac{\pi}{3}$ sur le cercle trigonométrique.

Le triangle IOA est isocèle en O et l'angle $\widehat{IOA}$ mesure $\frac{\pi}{3}$ (60 degrés).

Par sommes des angles, les angles à la base mesurent aussi $\frac{\pi}{3}$.

Le triangle OIA est donc équilatéral.

Les hauteurs sont donc aussi des médianes dans ce triangle.

Le pied H de la hauteur issue de A est donc le milieu de $[OI]$, et $OH = \frac{1}{2}$.

On a donc $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

Ensuite, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

Donc $\sin^2 \frac{\pi}{3} = 1 - \cos^2 \frac{\pi}{3} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

Donc $\sin \frac{\pi}{3} = \sqrt{\frac{3}{4}}$ ou $\sin \frac{\pi}{3} = -\sqrt{\frac{3}{4}}$.

Comme $0 \leq \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{2}$, $\sin \frac{\pi}{3} \geq 0$.

Donc $\sin \frac{\pi}{3} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

— Cosinus et sinus de $\frac{\pi}{4}$

Soit B l'image de $\frac{\pi}{4}$ sur le cercle, et H le pied de la hauteur issue de B dans IOB . Le triangle OBH est rectangle isocèle en H .

Le caractère isocèle se traduit par $HO = HB$, soit $\cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4}$.

D'après le théorème de Pythagore, $HO^2 + HB^2 = 1$, soit $2 \cos^2 \frac{\pi}{4} = 1$.

$\cos^2 \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$.

$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Or, $\cos \frac{\pi}{4} > 0$ car $0 < \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$.

Donc $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Comme $\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4}$, il vient aussi $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

□

III Fonctions cosinus et sinus

III.1 Périodicité

Définition

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, et $T > 0$ un nombre strictement positif.

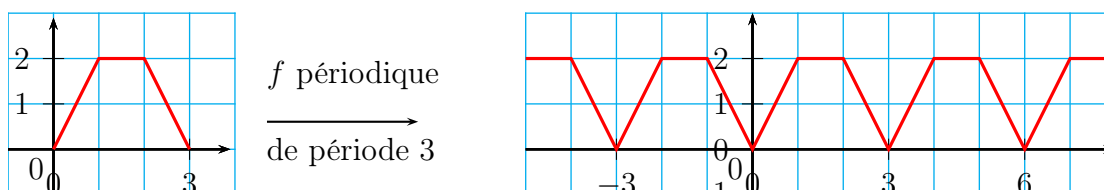
On dit que f est périodique de période T (ou T -périodique) lorsque pour tout x réel :

$$f(x + T) = f(x)$$

Conséquence graphique

Lorsqu'une fonction est T -périodique, sa courbe représentative est invariante par la translation de vecteur $T\vec{i}$.

Il suffit alors de connaître sa courbe sur n'importe quel intervalle de longueur T (par exemple $[0; T]$) pour pouvoir la compléter entièrement par des translations.



III.2 Étude des fonctions cos et sin

Théorème

1. Les fonctions sin et cos sont définies sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$$

$$\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$$

Les fonctions cos et sin sont ...

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos(-x) = \dots$$

La fonction cosinus est donc une fonction ...

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sin(-x) = \dots$$

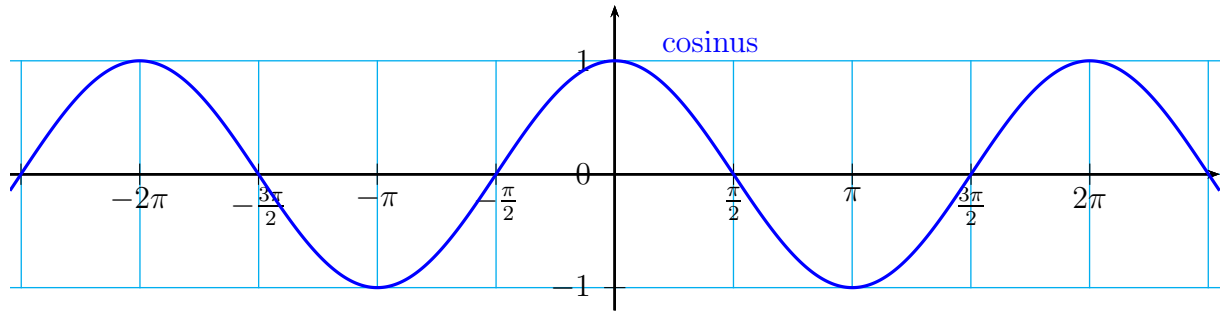
La fonction sinus est donc une fonction ...

4. Tableaux de variation sur $[0; 2\pi]$.

x	0	π	2π
$\cos x$	1	$\searrow$ -1	$\nearrow$ 1

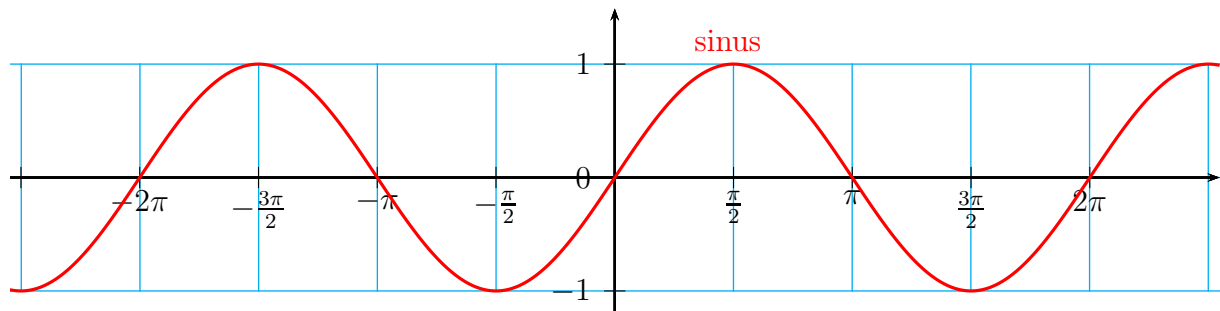
x	0	$\pi/2$	$3\pi/2$	2π
$\sin x$	0	$\nearrow$ 1	$\searrow$ -1	$\nearrow$ 0

Représentation graphique de la fonction cosinus



La courbe de la fonction cosinus est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (fonction paire).

Représentation graphique de la fonction sinus



La courbe de la fonction sinus est symétrique par rapport au point O , origine du repère (fonction impaire).

Remarque

Les courbes représentatives des fonctions cosinus et sinus sont appelées des sinusoïdes.

IV Compléments : angles associés

Théorème

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \cos(-x) &= \\ \sin(-x) &= \\ \cos(x + \pi) &= \\ \sin(x + \pi) &= \\ \cos(\pi - x) &= \\ \sin(\pi - x) &= \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= \end{aligned}$$

