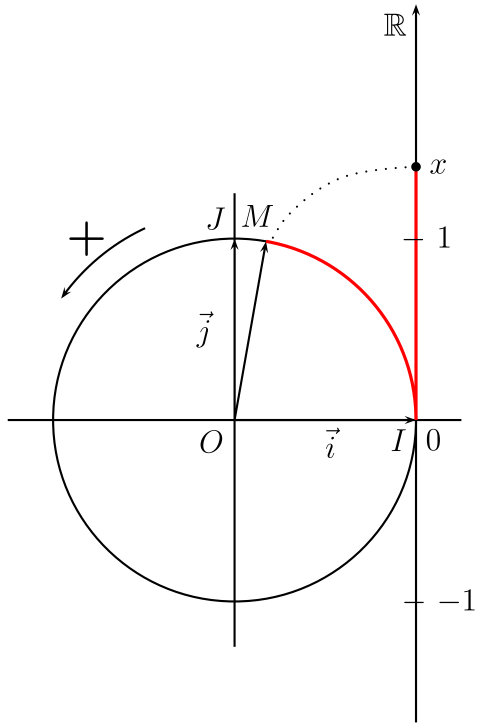
# Chapitre 6 : Trigonométrie

## I Le cercle trigonométrique

**Remarque**
L'ensemble des nombres entiers relatifs (positifs ou négatifs) se note $\mathbb{Z}$.
$\mathbb{Z} = \{\dots; -2; -1; 0; 1; 2; \dots\}$.

On se place dans un repère orthonormé $\left(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}\right)$.
On note $I$ et $J$ les points tels que $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{j}$.



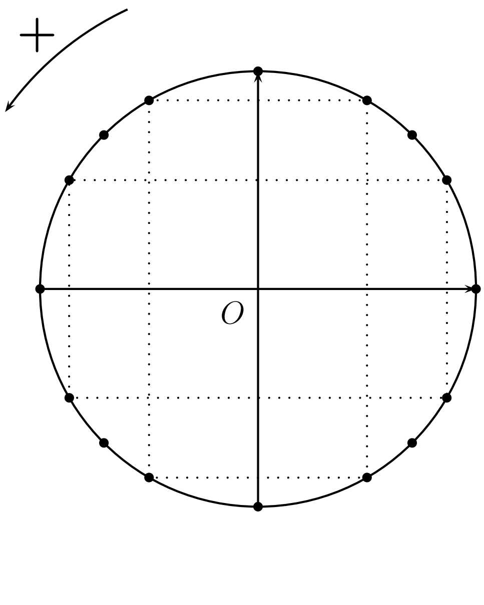

**Définition**
Le cercle trigonométrique est le cercle de centre $O$ et de rayon 1, pour lequel on a choisi pour sens direct le sens inverse des aiguilles d'une montre.

On enroule l'axe gradué des nombres réels sur le cercle en plaçant l'origine des réels en $I$.
Alors, à tout nombre réel $x$ correspond un unique point $M$ sur le cercle.
On dit que $M$ est l'image de $x$ sur le cercle.

**Remarque**
Le cercle trigonométrique a pour rayon 1, son périmètre est donc ...

**Exercice 1**
Placer les images des réels suivants sur le cercle trigonométrique :

1. $0$, $\pi$, $2\pi$, $3\pi$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$, $-\pi$, $-\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{4}$, $-\frac{3\pi}{4}$.
2. $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{11\pi}{6}$, $-\frac{\pi}{6}$.

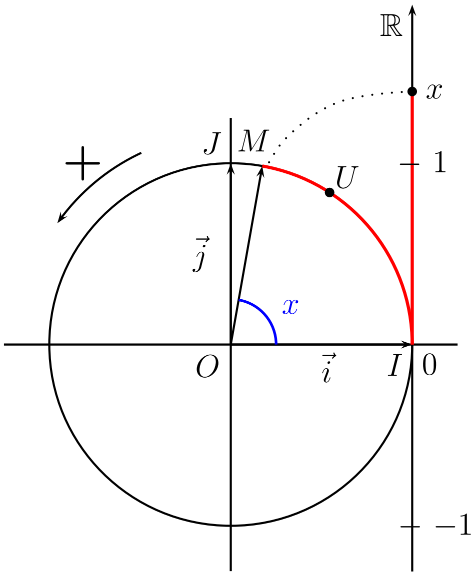


**Propriété**
Deux nombres réels ont la même image sur le cercle trigonométrique ssi ...
..............................................................................................
Les réels $x$ et $x'$ ont la même image ssi il existe ...

**Exercice 2**
Les réels suivants ont-ils la même image sur le cercle ?

1. $a = 13\pi$ et $b = 4\pi$.
2. $a = \dfrac{5\pi}{4}$ et $b = \dfrac{-19\pi}{4}$.

**Définition**
Soit $U$ l'image du nombre 1 sur le cercle trigonométrique.
Un radian est la mesure de l'angle géométrique $\widehat{IOU}$ interceptant un arc de cercle de longueur 1 sur le cercle trigonométrique.




**Remarque**

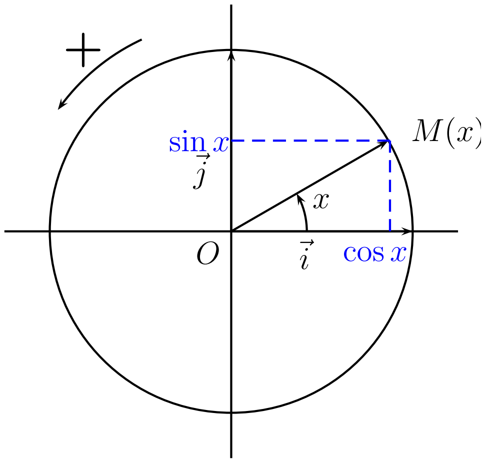
1. Lorsque $x \in [0;\pi]$, la longueur $x$ de l'arc de cercle $\overset{\frown}{OM}$ correspond à la mesure en radian de l'angle $\widehat{IOM}$.
2. Correspondance degré - radian

| Mesure en degrés | 360 | 180 | 90 | 60 | 45 | 30 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Mesure en radians | | | | | | | |

# II Trigonométrie

## II.1 Cosinus et sinus d'un réel

**Définition**
Soit $x \in \mathbb{R}$. Notons $M(x)$ l'image de $x$ sur le cercle trigonométrique.
Le cosinus de $x$ est l'abscisse de $M$ dans le repère $\left(O; \overrightarrow{i}\,; \overrightarrow{j}\right)$. On le note $\cos x$.
Le sinus de $x$ est l'ordonnée de $M$ dans $\left(O; \overrightarrow{i}\,; \overrightarrow{j}\right)$. On le note $\sin x$.

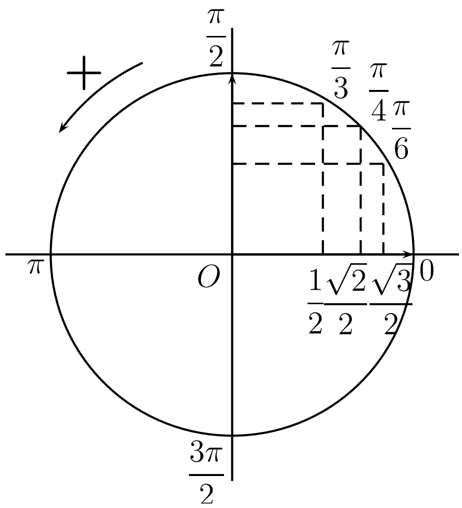



**Propriété (conséquences immédiates)**
Pour tout $x$ réel, on a :

- $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$.
- pour tout $k \in \mathbb{Z}$,
$$\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$$
$$\sin(x + 2k\pi) = \sin(x).$$
- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

**Propriété (valeurs remarquables)**

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\cos(x)$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $-1$ |
| $\sin(x)$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ | $0$ |




**Démonstration**
On démontre $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, et $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

— Cosinus et sinus de $\frac{\pi}{3}$.

Soit $A$ l'image de $\frac{\pi}{3}$ sur le cercle trigonométrique.
Le triangle $IOA$ est isocèle en $O$ et l'angle $\widehat{IOA}$ mesure $\frac{\pi}{3}$ (60 degrés).
Par sommes des angles, les angles à la base mesurent aussi $\frac{\pi}{3}$.
Le triangle $OIA$ est donc équilatéral.
Les hauteurs sont donc aussi des médianes dans ce triangle.
Le pied $H$ de la hauteur issue de $A$ est donc le milieu de $[OI]$, et $OH = \frac{1}{2}$.

On a donc $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.
Ensuite, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.
Donc $\sin^2\frac{\pi}{3} = 1 - \cos^2\frac{\pi}{3} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.
Donc $\sin\frac{\pi}{3} = \sqrt{\frac{3}{4}}$ ou $\sin\frac{\pi}{3} = -\sqrt{\frac{3}{4}}$.
Comme $0 \leqslant \frac{\pi}{3} \leqslant \frac{\pi}{2}$, $\sin\frac{\pi}{3} \geqslant 0$.
Donc $\sin\frac{\pi}{3} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

— Cosinus et sinus de $\frac{\pi}{4}$
Soit $B$ l'image de $\frac{\pi}{4}$ sur le cercle, et $H$ le pied de la hauteur issue de $B$ dans $IOB$. Le triangle $OBH$ est rectangle isocèle en $H$.
Le caractère isocèle se traduit par $HO = HB$, soit $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4}$.
D'après le théorème de Pythagore, $HO^2 + HB^2 = 1$, soit $2\cos^2\frac{\pi}{4} = 1$.
$\cos^2\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$.
$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
Or, $\cos\frac{\pi}{4} > 0$ car $0 < \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$.
Donc $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Comme $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4}$, il vient aussi $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. □

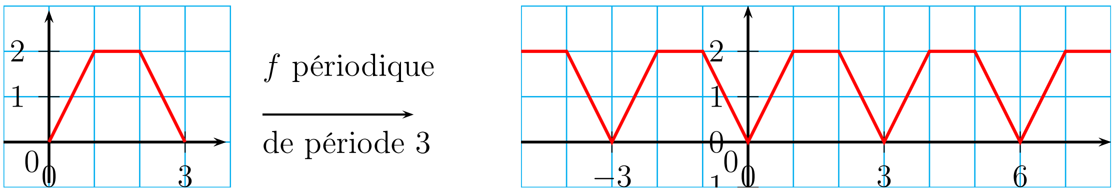
# III Fonctions cosinus et sinus

## III.1 Périodicité

**Définition**
Soit $f$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$, et $T > 0$ un nombre strictement positif.
On dit que $f$ est périodique de période $T$ (ou $T$-périodique) lorsque pour tout $x$ réel :

$$f(x+T) = f(x)$$

**Conséquence graphique**
Lorsqu'une fonction est $T$-périodique, sa courbe représentative est invariante par la translation de vecteur $T\vec{i}$.
Il suffit alors de connaître sa courbe sur n'importe quel intervalle de longueur $T$ (par exemple $[0;T]$) pour pouvoir la compléter entièrement par des translations.




## III.2 Étude des fonctions cos et sin

**Théorème**

1. Les fonctions sin et cos sont définies sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos(x+2\pi) = \cos(x)$$
$$\sin(x+2\pi) = \sin(x)$$

   Les fonctions cos et sin sont ...

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos(-x) = \ldots$$

   La fonction cosinus est donc une fonction ...

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sin(-x) = \ldots$$

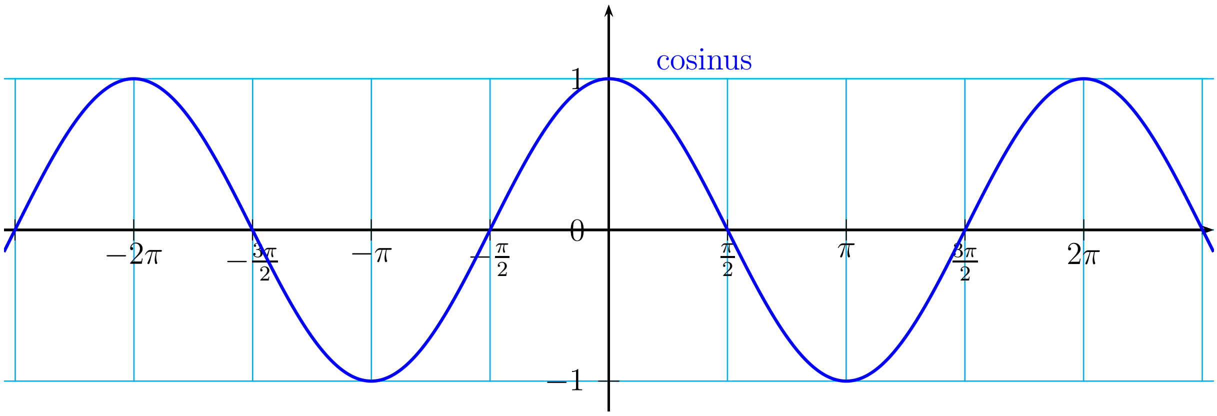
   La fonction sinus est donc une fonction ...

4. Tableaux de variation sur $[0;2\pi]$.

| $x$ | $0$ | | $\pi$ | | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\cos x$ | $1$ | ↘ | $-1$ | ↗ | $1$ |

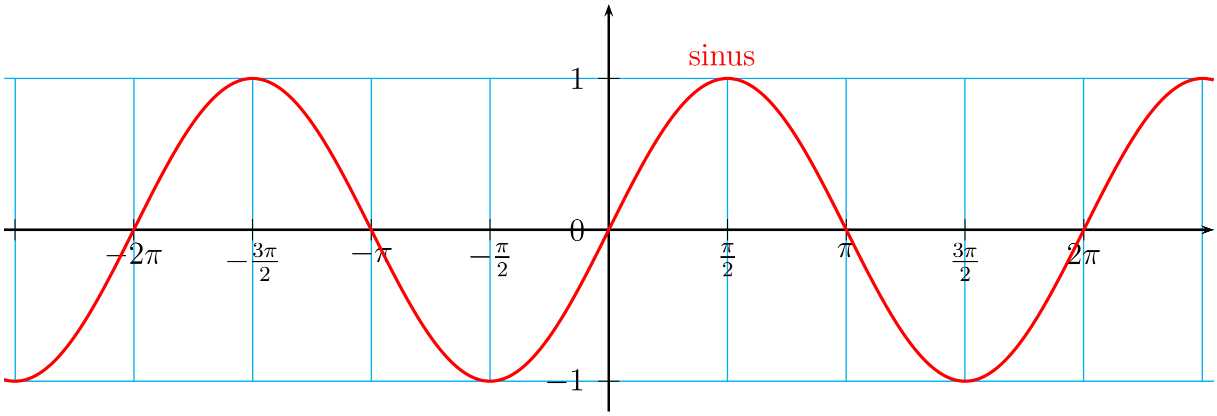
| $x$ | $0$ | | $\pi/2$ | | $3\pi/2$ | | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sin x$ | $0$ | ↗ | $1$ | ↘ | $-1$ | ↗ | $0$ |

**Représentation graphique de la fonction cosinus**




La courbe de la fonction cosinus est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (fonction paire).

**Représentation graphique de la fonction sinus**




La courbe de la fonction sinus est symétrique par rapport au point $O$, origine du repère (fonction impaire).

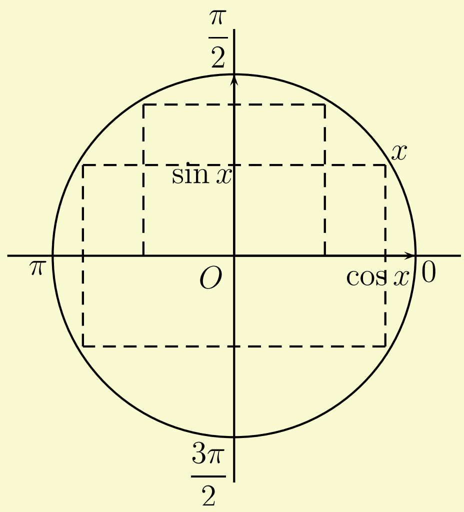
**Remarque**
Les courbes représentatives des fonctions cosinus et sinus sont appelées des sinusoïdes.

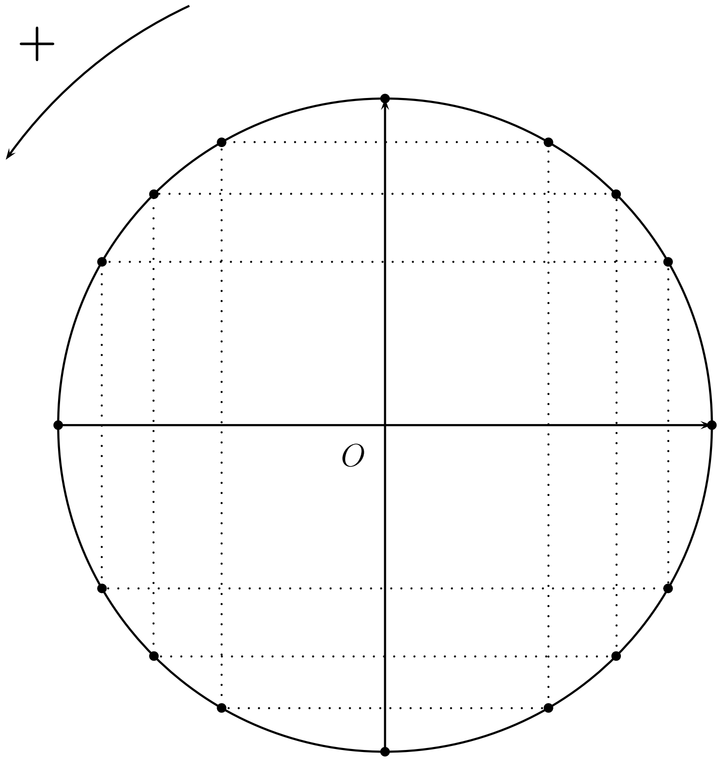
# IV Compléments : angles associés

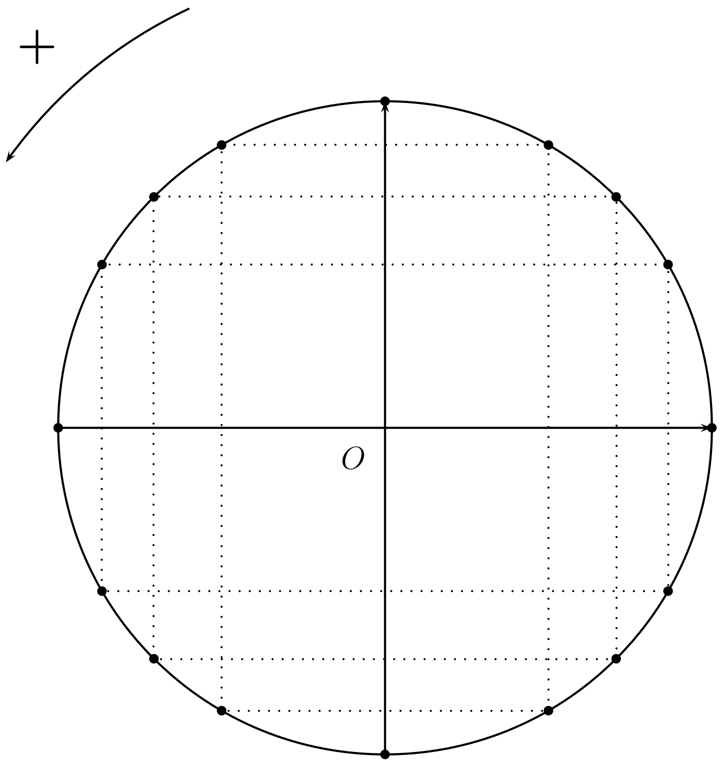
**Théorème**

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\cos(-x) &= \\
\sin(-x) &= \\
\cos(x+\pi) &= \\
\sin(x+\pi) &= \\
\cos(\pi - x) &= \\
\sin(\pi - x) &= \\
\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \\
\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \\
\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= \\
\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &=
\end{aligned}$$




+
O


+
O