1G. Correction du devoir maison n° 2

Exercice 1

On admet que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = 3x^2 + 3x - 60 = 3\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{243}{4} = 3(x-4)(x+5)$$

1. $f(x) \leqslant 0$.
   D'après la forme factorisée, les racines de f sont 4 et -5.
   Le trinôme prend le signe de a à l'extérieur des racines (ici $a = 3$).

x	$-\infty$		-5		4		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\boxed{\text{L'ensemble solution de l'inéquation } f(x) \leqslant 0 \text{ est } S = [-5;4].}$

2. $f(x) \geqslant -60$.
   D'après la forme développée, $f(x) \geqslant -60$ ssi $3x^2 + 3x - 60 \geqslant -60$ ssi $3x^2 + 3x \geqslant 0$ ssi $3x(x+1) \geqslant 0$.
   $3x(x+1)$ est une expression du second degré dont les racines sont 0 et -1. Elle prend le signe de a à l'extérieur des racines, et ici $a = 3 > 0$.

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$3x(x+1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\boxed{S =]-\infty;-1] \cup [0;+\infty[.}$

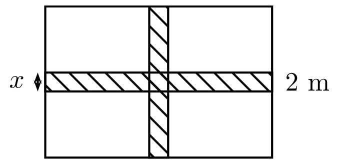
3. $f(x) \geqslant -\dfrac{243}{4}$.
   D'après la forme canonique, $f(x) \geqslant -\dfrac{243}{4}$ ssi $3\left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 \geqslant 0$.
   Un carré est toujours positif ou nul, et $\left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 = 0$ ssi $x = -\dfrac{1}{2}$.
   La multiplication par $3 > 0$ conserve le signe.

x	$-\infty$		$-1/2$		$+\infty$
$3(x+\frac{1}{2})^2$		$+$	0	$+$	

$\boxed{S = \mathbb{R} =]-\infty;+\infty[.}$

Exercice 2 (111 p 85)

Notons x la largeur, en m, de la partie rouge en forme de croix.



Cette partie rouge est formée de deux rectangles de dimensions 3 et x pour l'un, 2 et x pour l'autre. Ils se croisent suivant un carré de côté x. Ainsi l'aire rouge est $R(x) = 3x + 2x - x^2 = -x^2 + 5x$.

$3 \times 2 = 6$. L'aire totale du drapeau est de 6 m^2.

Comme il n'y a que deux couleurs, l'aire rouge et l'aire blanche sont égales ssi l'aire rouge représente la moitié de l'aire totale du drapeau.

D'où l'équation $R(x) = \dfrac{1}{2} \times 6$.

$-x^2 + 5x = 3$ ssi $x^2 - 5x + 3 = 0$.

$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 25 - 12 = 13$.

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{5-\sqrt{13}}{2} \approx 0,697.$ $\quad x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{5+\sqrt{13}}{2} \approx 4,303.$

D'après le contexte, x est positif (c'est une longueur), et inférieur à 2 (largeur du drapeau), soit $x \in [0;2]$. On ne retient que la première solution.

$\boxed{\text{La largeur de la croix rouge est de } \dfrac{5-\sqrt{13}}{2}\text{, soit environ } 0,697 \text{ m.}}$

Exercice 3

Deux entiers naturels ont pour différence 7 et la différence entre leur produit et leur somme est égale à 43. Quels sont-ils ?

Soient x et y de tels nombres, x étant le plus grand.

On a $x - y = 7$, et $xy - (x+y) = 43$.

On a alors $y = x - 7$, et en remplaçant dans la 2^e équation :

$$\begin{aligned} x(x-7) - (x + x - 7) &= 43 \\ x^2 - 7x - 2x + 7 &= 43 \\ x^2 - 9x - 36 &= 0 \end{aligned}$$

$\Delta = b^2 - 4ac = 9^2 + 4 \times 36 = 225 = 15^2 > 0$.

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{9-15}{2} = -3$ $\quad x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{9+15}{2} = 12$

On exclut $x = -3$ car on cherche des entiers naturels.

Il reste $x = 12$, alors $y = x - 7 = 12 - 7 = 5$.

Vérifions que 12 et 5 répondent au problème :

$12 - 5 = 7$ et $12 \times 5 - (12 + 5) = 60 - 17 = 43$.

$\boxed{\text{Les nombres cherchés sont 12 et 5.}}$