Correction du dm13.
Produit scalaire dans l'espace

Exercice 1 (n^o 157 page 290 : Distance d'un point à un plan)
Partie A
Soient $\mathscr{P}$ un plan et I un point de l'espace. On appelle distance de I au plan $\mathscr{P}$ la distance IH où H est le point d'intersection de $\mathscr{P}$ avec sa perpendiculaire menée par le point I.
On se place dans un repère orthonormé de l'espace.
Le but de l'exercice est de démontrer que si le plan $\mathscr{P}$ a pour équation $ax+by+cz+d=0$, alors la distance du point I au plan $\mathscr{P}$ est

$$d(I;\mathscr{P}) = \frac{|ax_I + by_I + cz_I + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

en notant $I(x_I;y_I;z_I)$.
On pose $\overrightarrow{n}(a;b;c)$.

1. Justifier que $|\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{IH}| = IH\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.
   On distingue deux cas :
   Si $I \in \mathscr{P}$, alors $I = H$, et l'égalité ci-dessus est vérifiée puisque les deux membres sont nuls.
   Sinon, $I \neq H$.
   H est le point d'intersection de $\mathscr{P}$ avec sa perpendiculaire menée par le point I.
   Donc $(IH) \perp \mathscr{P}$.
   D'après l'équation du plan, il est clair que $\overrightarrow{n}(a;b;c)$ est un vecteur normal à $\mathscr{P}$. Les vecteurs $\overrightarrow{IH}$ et $\overrightarrow{n}$ sont donc colinéaires.
   Par conséquent, s'ils sont de même sens, $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{IH} = ||\overrightarrow{IH}||\times||\overrightarrow{n}|| = IH\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.
   S'ils sont de sens contraires, $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{IH} = -IH\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.
   $\boxed{\text{Dans tous les cas, on a bien } |\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{IH}| = IH\sqrt{a^2+b^2+c^2}.}$
2. Montrer que $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{IH} = -ax_I - by_I - cz_I - d$.
   On a $\overrightarrow{IH}(x_H - x_I; y_H - y_I; z_H - z_I)$, et $\overrightarrow{n}(a;b;c)$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{IH} &= a(x_H - x_I) + b(y_H - y_I) + c(z_H - z_I)\\ &= ax_H + by_H + cz_H - ax_I - by_I - cz_I\end{aligned}$$

   Or, comme $H \in \mathscr{P}$, $ax_H + by_H + cz_H + d = 0$, soit $ax_H + by_H + cz_H = -d$.
   $\boxed{\text{Donc } \overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{IH} = -ax_I - by_I - cz_I - d.}$
3. En déduire que $IH = \dfrac{|ax_I + by_I + cz_I + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.
   D'après les deux questions précédentes,

$$\begin{aligned}IH &= \frac{|\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{IH}|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\\ &= \frac{|ax_I + by_I + cz_I + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\end{aligned}$$

La distance du point I au plan $\mathscr{P}$ est donnée par la formule :

$$\boxed{d(I;\mathscr{P}) = IH = \frac{|ax_I + by_I + cz_I + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$

Partie B
On considère les points $A(3;-2;2)$, $B(6;-2;-1)$, $C(6;1;5)$, et $D(4;0;-1)$.

1. Montrer que le triangle ABC est rectangle. En déduire l'aire du triangle ABC.
   $AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2 = 9 + 0 + 9 = 18$.
   $AC^2 = 9 + 9 + 9 = 27$.
   $BC^2 = 0 + 9 + 36 = 45$.
   Or, $AB^2 + AC^2 = 18 + 27 = 45$.
   Donc $BC^2 = AB^2 + AC^2$.
   D'après la réciproque du théorème de Pythagore, ABC est rectangle en A.

$$\begin{aligned} Aire(ABC) &= \frac{base \times hauteur}{2} \\ &= \frac{AB \times AC}{2} \\ &= \frac{\sqrt{18} \times \sqrt{27}}{2} \\ &= \frac{3\sqrt{2} \times 3\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{9\sqrt{6}}{2} \end{aligned}$$

   L'aire du triangle ABC est $\frac{9\sqrt{6}}{2}$ (environ 11,02).

2. (a) Vérifier que $\overrightarrow{n}(1; -2; 1)$ est normal au plan (ABC).
   $\overrightarrow{AB}(3; 0; -3)$ et $\overrightarrow{AC}(3; 3; 3)$ ne sont pas colinéaires et forment donc une base du plan (ABC).
   $\overrightarrow{n} \cdot AB = 3 + 0 - 3 = 0$.
   $\overrightarrow{n} \cdot AC = 3 - 6 + 3 = 0$.
   Comme $\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{AC}$, le vecteur $\overrightarrow{n}$ est normal au plan (ABC).

   (b) En déduire un équation du plan (ABC).
   Comme $\overrightarrow{n}(1; -2; 1)$ est normal à (ABC), le plan admet une équation de la forme $x - 2y + z + d = 0$.
   Comme $A(3; -2; 2) \in (ABC)$,

$$\begin{aligned} 3 + 4 + 2 + d &= 0 \\ d &= -9 \end{aligned}$$

   Une équation du plan (ABC) est $x - 2y + z - 9 = 0$.

3. (a) Calculer la distance du point D au plan (ABC).
   $D(4; 0; -1)$; et $(ABC) : x - 2y + z - 9 = 0$. D'après la partie A,

$$\begin{aligned} d(D; (ABC)) &= \frac{|4 \times 1 - 2 \times 0 - 1 - 9|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2}} \\ &= \frac{|-6|}{\sqrt{6}} \\ &= \frac{6}{\sqrt{6}} \\ &= \sqrt{6} \end{aligned}$$

   (b) Déterminer le volume du tétraàdre $ABCD$.
   Notons H l pied de la hauteur issue de D.
   Alors, H est le point du plan (ABC) tel que $(DH) \perp (ABC)$.
   La hauteur issue de D du tétràdre a pour longueur $DH = \sqrt{6}$.

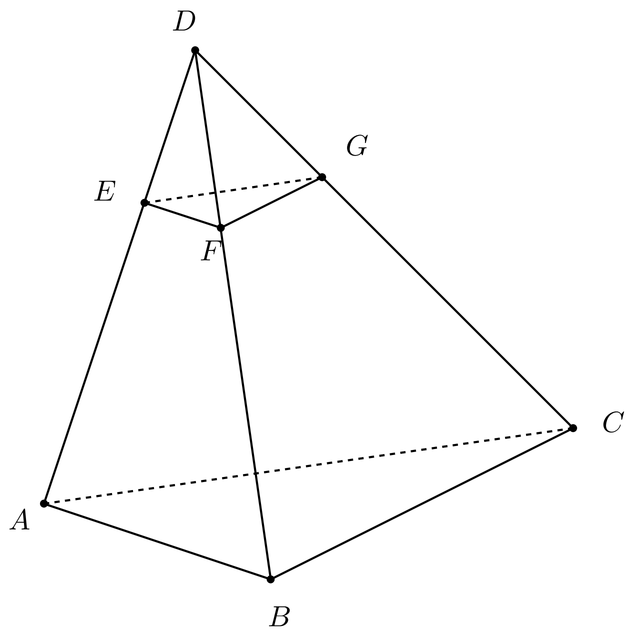
$$\begin{aligned} Volume(ABCD) &= \frac{aire(base) \times hauteur}{3} \\ &= \frac{Aire(ABC) \times DH}{3} \\ &= \frac{9\sqrt{6} \times \sqrt{6}}{2 \times 3} \\ &= 9 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Le volume du tétraèdre } ABCD \text{ est 9 (unités de volume).}}$

4. Soit $\mathscr{Q}$ le plan d'équation $x - 2y + z - 5 = 0$.
   Déterminer la position relative des deux plans (ABC) et $\mathscr{Q}$.
   Le vecteur $\overrightarrow{n}(1; -2; 1)$ est normal aux deux plans : ils sont donc parallèles.
   Ils ne sont pas confondus car leurs équations ne sont pas équivalentes.
   Sinon, on vérifie que $A(3; -2; 2) \notin \mathscr{Q}$.
   $\boxed{\text{Les plans } (ABC) \text{et } \mathscr{Q} \text{ sont strictement parallèles.}}$
5. Le plan $\mathscr{Q}$ coupe respectivement (DA), (DB) et (DC) en E, F et G.
   Déterminer les coordonnées de E et montrer que $E \in [AD]$.
   La droite (AD) passe par $A(3; -2; 2)$ et est dirigée par $\overrightarrow{AD}(1; 2; -3)$.
   Une représentation paramétrique de la droite (AD) est : $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -2 + 2t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 2 - 3t \end{cases}$.
   Pour déterminer le point E d'intersection de la droite (AD) avec le plan$\mathscr{Q}$, on cherche un réel t tel que

$$\begin{aligned} (3 + t) - 2(-2 + 2t) + (2 - 3t) - 5 &= 0 \\ 3 + t + 4 - 4t + 2 - 3t - 5 &= 0 \\ -6t &= -4 \\ t &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

   $\boxed{\text{En remplaçant } t \text{ par } \frac{2}{3}\text{, on a } E\left(\frac{11}{3}; -\frac{2}{3}; 0\right).}$
   Comme E est le point de paramètre $t = \frac{2}{3}$, on a $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$.
   $\boxed{\text{Donc } E \in [AD].}$
6. Déterminer le volume du tétraèdre $EFGD$.
   On a donc $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$.



En appliquant le théorème de Thalès autant de fois que nécessaire, on montre que toutes les longueurs du tétraèdre $EFGD$ s'obtiennent en multipliant par $\frac{1}{3}$ les longueurs correspondantes de $ABCD$.
Or, si on multiplie les longueurs par une constante k (positive), les aires sont multipliées par k^2 et les volumes par k^3.

$$\begin{aligned} Volume(EFGD) &= \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times Volume(ABCD) \\ &= \frac{1}{27} \times 9 \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Le volume du tétraèdre } EFGD \text{ est } \frac{1}{3}.}$

Partie C

Soient $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ les plans déquations respectives $3x+6y-2z-1=0$ et $2x+y-2z+3=0$.
En utilisant la partie A, déterminer l'ensemble des points équidistants des deux plans $\mathscr{P}_1$ et P_2.
Soit $M(x;y;z)$ un point de l'espace.
$d(M;\mathscr{P}_1) = \dfrac{|3x+6y+2z+1|}{\sqrt{3^2+6^2+(-2)^2}} = \dfrac{|3x+6y-2z+1|}{\sqrt{49}} = \dfrac{|3x+6y-2z+1|}{7}$.
$d(M;\mathscr{P}_2) = \dfrac{|2x+y-2z+3|}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}} = \dfrac{|2x+y-2z+3|}{\sqrt{9}} = \dfrac{|2x+y-2z+3|}{3}$.
Ainsi, M est équidistant de $\mathscr{P}_1$ et de $\mathscr{P}_2$ si et seulement si

$$\begin{aligned} \frac{|3x+6y-2z+1|}{7} &= \frac{|2x+y-2z+3|}{3} \\ 3|3x+6y-2z+1| &= 7|2x+y-2z+3| \\ |9x+18y-6z+3| &= |14x+7y-14z+21| \end{aligned}$$

Or, $|a| = |b|$ ssi ($a = b$ ou $a = -b$).
Donc M est équidistant de $\mathscr{P}_1$ et de $\mathscr{P}_2$ si et seulement si

$$
\begin{array}{rcl}
9x+18y-6z+3 = 14x+7y-14z+21 & \text{ou} & 9x+18y-6z+3 = -(14x+7y-14z+21) \\
5x-11y-8z+18=0 & \text{ou} & 23x+25y-20z+24=0
\end{array}
$$

On obtient donc la réunion de deux plans :
U d'équation $5x-11y-8z+18=0$ et V d'équation $23x+25y-20z+24=0$.
On dit que U et V sont les plans bissecteurs des deux plans $\mathscr{P}_1$et $\mathscr{P}_2$.

Remarque :
La notion de plans bissecteurs de 2 plans est l'extension à l'espace de la notion de bissectrices de deux droites.
De même que les deux bissectrices de deux droites sécantes sont toujours perperdiculaires, les plans bissecteurs de 2 plans sécants sont toujours perpendiculaires.
On peut le vérifier sur cet exemple :
Un vecteur normal au plan U est $\overrightarrow{u}(5;-11;-8)$.
Un vecteur normal au plan V est $\overrightarrow{v}(23;25;-20)$.
$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = 5\times 23 - 11\times 25 + (-8)\times(-20) = 0$.

Donc $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$. Les plans U et V sont perpendiculaires.