BTS CRSA2. Correction de l'interrogation n° 7

Exercice 1 (cours, 4 points)

1. Soit X un variable suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
   (a) La fonction de densité est définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$
   (b) L'espérance de X est $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$.
2. Soit X une variable suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
   (a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(X = k) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$
   (b) $E(X) = \lambda$

Exercice 2

La variable X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,2$.

1. Donner l'expression de la fonction de densité.
   Pour tout $x \in [0;+\infty[$, $f(x) = 0,2e^{-0,2x}$
2. Calculer les probabilités, arrondir à 0,001 près.
   $P(1 \leqslant X \leqslant 3)$ $\quad$ $P(X \leqslant 6)$ $\quad$ $P(X > 4)$ $\quad$ $P(X = 3)$
   $P(1 \leqslant X \leqslant 3) = \displaystyle\int_1^3 0,2e^{-0,2x}\,dx = [-e^{-0,2x}]_1^3 = -e^{-0,6} + e^{-0,2} \approx 0,270$
   $P(X \leqslant 6) = \displaystyle\int_0^6 0,2e^{-0,2x}\,dx = [-e^{-0,2x}]_0^6 = -e^{-1,2} + e^0 = 1 - e^{-1,2} \approx 0,699.$
   $P(X > 4) = 1 - P(X < 4) = 1 - [-e^{-0,2x}]_0^4 = 1 + e^{-0,8} - 1 = e^{-0,8} \approx 0,449.$
   $P(X = 3) = 0.$
3. Déterminer l'espérance $E(X)$ et l'écart-type $\sigma(X)$.
   $E(X) = \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{1}{0,2} = 5.$ $\quad$ $\sigma(X) = \dfrac{1}{\lambda} = 5.$

Exercice 3

Dans cet exercice les probabilités seront arrondies à 10^{-2}.
La durée de vie, exprimée en mois, d'un ordinateur portable est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.
On suppose que l'espérance de vie d'un ordinateur est de 6 ans.

1. Déterminer la valeur exacte du paramètre λ.
   6 ans font $6 \times 12 = 72$ mois. Donc $E(X) = \dfrac{1}{\lambda} = 72$, et $\lambda = \dfrac{1}{72}$.
2. Pour la suite, on prendra $\lambda = \dfrac{1}{72}$.
   Calculer $P(X \leqslant 48)$. Interpréter.
   $P(X \leqslant 48) = \displaystyle\int_0^{48} \lambda e^{-\lambda x}\,dx = [-e^{-x/72}]_0^{48} = 1 - e^{-2/3} \approx 0,49.$
   La probablité que l'appreil fonctionne moins de 4 ans est de 0,49.
3. Calculer la probabilité des évènements suivants :
   (a) A : "la durée de bon fonctionnement est supérieure à trois ans".
   $P(A) = P(X > 3\times 12) = P(X > 36) = 1 - P(X < 36) = 1 - [-e^{-x/72}]_0^{36} = e^{-36/72} = e^{-0,5} \approx 0,61.$
   (b) B : "la durée de bon fonctionnement est comprise entre un an et trois ans".
   $P(12 < X < 36) = [-e^{-x/72}]_{12}^{36} = -e^{-0,5} + e^{-1/6} \approx 0,24.$
4. On suppose que l'ordinateur a bien fonctionné durant 4 ans. Calculer la probabilité qu'il fonctionne bien au moins 8 ans.
   La loi exponentielle est sans mémoire.
   $P_{X>4\times 12}(X > 8 \times 12) = P(X > 4 \times 12) = P(X > 48) = 1 - P(X < 48) \approx 1 - 0,49 = 0,51.$

Exercice 4

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre 1,8.

1. Déterminer l'espérance de X.
   $E(X) = \lambda = 1,8.$
2. Calculer les probabilités suivantes (arrondir à 10^{-3}) :
   $P(X = 2)$ $\quad$ $P(X \leqslant 3)$ $\quad$ $P(X > 2)$
   $P(X = 2) \approx 0,268.$
   $P(X \leqslant 3) \approx 0,891$
   $P(X > 2) \approx 0,269.$
   (Num : $P(X \geqslant 3$, et TI/Casio : $1 - P(X \leqslant 2))$

Exercice 5

Une machine fabrique plusieurs milliers de bouchons cylindriques par jour. On admet que la probabilité qu'un bouchon, prélevé au hasard dans la production d'une journée, soit défectueux est 0,05.
On prélève au hasard un échantillon de 80 bouchons. Ce prélèvement est assimilé à un tirage de 80 bouchons avec remise. On nomme X la variable aléatoire qui, à chaque tirage de 80 bouchons, associe le nombre de bouchons défectueux dans cet échantillon.

1. Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire X ?
   X suit la loi binomiale de paramètres $n = 80$ et $p = 0,05$.
2. Déterminer l'espérance mathématique de X.
   $E(X) = np = 80 \times 0,05 = 4.$
3. Justifier que l'on peut approcher la loi de la variable aléatoire X par une loi de Poisson. Donner le paramètre λ de cette loi de Poisson.
   $n = 80 > 30$, et $p = 0,05 < 0,1$, et $np = 4 < 10$.
   On peut approcher X par une variable Y suivant la loi de Poison de paramètre $\lambda = np = 4$.
4. On note Y la variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ.
   (a) Calculer avec Y la probabilité qu'un tel prélèvement contienne exactement 10 bouchons défectueux.
   $P(Y = 10) \approx 0,0053.$
   (b) Comparer avec $P(X = 10)$.
   Avec la loi binomiale, $P(X = 10) \approx 0,0044.$