Terminale STI. Correction du DM3 de spécialité

Exercice 1 (45 page 216)

Étudier la fonction f définie par $f(x) = (-4x+8)\mathrm{e}^{-x}$ en cherchant le signe de sa dérivée.
On rappelle la dérivée d'un produit $(uv)' = u'v + uv'$.
Ici, on pose $u(x) = -4x + 8$, donc $u'(x) = -4$.
Et $v(x) = \mathrm{e}^{-x}$ donc $v'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$.
En effet, par propriété du cours, pour tout $k \in \mathbb{R}$, la dérivée de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{kx}$ est $x \mapsto k\mathrm{e}^{kx}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= -4\mathrm{e}^{-x} + (-4x+8) \times (-\mathrm{e}^{-x}) \\ &= \mathrm{e}^{-x}(-4+4x-8) \\ &= (4x-12)\mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

Comme $\mathrm{e}^{-x} > 0$ sur $\mathbb{R}$, $f'(x)$ a le même signe que $4x - 12$.
Or, $4x - 12 = 0$ ssi $x = 3$, et $4x - 12 > 0$ ssi $x > 3$.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$-4\mathrm{e}^{-3}$	$\nearrow$	

$f(3) = (-4 \times 3 + 8)\mathrm{e}^{-3} = -4\mathrm{e}^{-3}$.
Complément : les limites à l'infini.
$\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} (-4x+8) = \lim\limits_{x\to-\infty} -4x = +\infty$.
Par produit, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (-4x+8) = \lim\limits_{x\to+\infty} -4x = -\infty$.
C'est une forme indéterminée (du type "$\pm\infty \times 0$").
Par croissance comparée (l'exponentielle l'emporte sur le polynôme), $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

Exercice 2 (78 page 219)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{-2x+7}{\mathrm{e}^{2x}}$.

1. Limites en $-\infty$ et $+\infty$.
   $\lim\limits_{x\to-\infty} -2x+7 = \lim\limits_{x\to-\infty} -2x = +\infty$
   $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{2x} = 0+$
   $\boxed{\text{Par quotient, } \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty}$
   $\lim\limits_{x\to+\infty} -2x+7 = \lim\limits_{x\to+\infty} -2x = -\infty$
   $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{2x} = +\infty$
   C'est une forme indéterminée (du type $\dfrac{-\infty}{+\infty}$).
   $\boxed{\text{Par croissances comparées (exponentielle l'emporte), } \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0}$
2. Calculer $f'(x)$.
   On rappelle la dérivée d'un quotient $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.
   Ici, on pose $u(x) = -2x + 7$, donc $u'(x) = -2$.
   Et $v(x) = \mathrm{e}^{2x}$ donc $v'(x) = 2\mathrm{e}^{2x}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-2\mathrm{e}^{2x} - (-2x+7) \times 2\mathrm{e}^{2x}}{(\mathrm{e}^{2x})^2} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{2x}[-2 - (-2x+7) \times 2]}{\mathrm{e}^{2x} \times \mathrm{e}^{2x}} \\ &= \frac{4x-16}{\mathrm{e}^{2x}} \end{aligned}$$

3. Signe de la dérivée et variations de f.
   Comme $\mathrm{e}^{2x} > 0$, $f'(x)$ a le même signe que $4x - 16$.
   $4x - 16 = 0$ ssi $x = 4$, et $4x - 16 > 0$ ssi $x > 4$.
   $f(x) = \dfrac{-2x+7}{\mathrm{e}^{2x}}$, donc $f(4) = \dfrac{-8+7}{\mathrm{e}^{8}} = -\dfrac{1}{\mathrm{e}^{8}} = -\mathrm{e}^{-8}$.
   On ajoute aussi les limites dans la ligne de $f(x)$ du tableau de variation.

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\mathrm{e}^{-8}$	$\nearrow$	0