

Seconde. Interrogation de mathématiques n° 6
Correction du sujet 1

Exercice 1 (cours, 2 points)

1. Énoncer les trois identités remarquables.

Pour tous nombres réels a et b ,

(a) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

(b) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

(c) $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

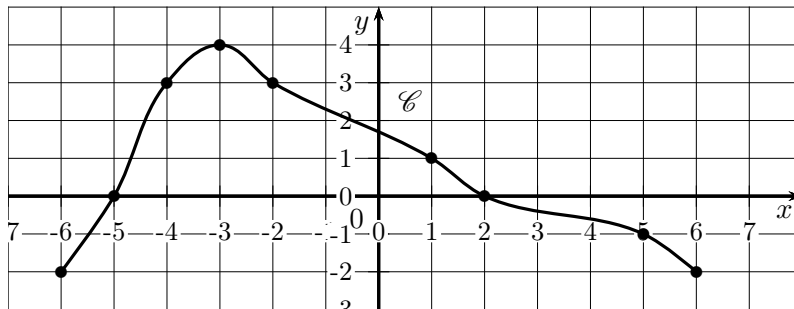
2. Compléter ci-dessous la définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} .

On dit que f est décroissante sur I lorsque pour tous a, b appartenant à I , si $a < b$ alors $f(a) \geq f(b)$.

Exercice 2 (3 points)

On donne ci-dessous la courbe \mathcal{C} d'une fonction f .



Donner sans justification :

1. le tableau de variation de f .

x	-6	-3	6
$f(x)$	-2	4	-2

2. le tableau de signe de f .

x	-6	-5	2	6	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Exercice 3 (8 points)

On donne ci-dessous le tableau de variation d'une fonction f définie sur $[-6; 4]$.

x	-6	-3	-1	3	4
$f(x)$	2	3	-2	3/2	1/2

De plus, les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont -2 et 1 .

1. Donner le maximum de f sur $[-6; 4]$ et en quelle(s) valeur(s) il est atteint. (On ne demande pas de justifier).

Le maximum de f est 3, il est atteint en -3 .

2. Comparer $f(-1, 7)$ et $f(-1, 3)$. Justifier.

$-1, 7 < -1, 3$ et f est décroissante sur l'intervalle $[-3; -1]$ qui contient ces deux nombres. Donc $f(-1, 7) \geq f(-1, 3)$.

3. Compléter l'encadrement suivant (sans justification) :

Lorsque $x \in [-6; -1]$, $-2 \leq f(x) \leq 3$.

4. Donner un encadrement de $f(-4, 5)$ et de $f(3, 1)$. Peut-on comparer ces deux nombres ?

On a $2 \leq f(-4, 5) \leq 3$, et $\frac{1}{2} \leq f(3, 1) \leq \frac{3}{2}$.

Comme les intervalles $[2; 3]$ et $[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}]$ sont disjoints, on peut comparer ces deux images :

$f(3, 1) \leq \frac{3}{2} < 2 \leq f(-4, 5)$, donc $f(3, 1) < f(-4, 5)$

5. Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifier.

(a) "Pour tout $x \in [-6; 4]$, $f(x) \geq 1$."

Faux.

Voici un contre-exemple : pour $x = -1$, on a $f(-1) = -2 < 1$.

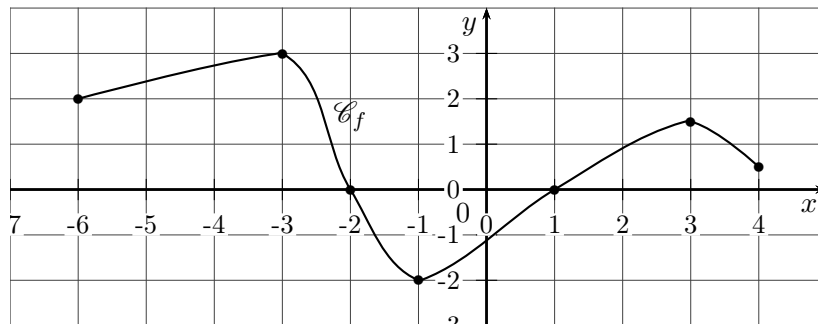
(b) "Pour tout x dans l'intervalle $[-6; 4]$, $f(x) > x$."

Faux.

Voici un contre-exemple : pour $x = 4$, on a $f(4) = \frac{1}{2} \leq 4$.

6. Tracer la courbe d'une fonction f compatible avec toutes les données de l'énoncé.

On n'oublie pas que $f(-2) = f(1) = 0$.



7. Dresser le tableau de signe de f (sans justifier).

x	-6	-2	1	4	
$g(x)$	+	0	-	0	+

Exercice 4 (4 points)

Développer et réduire les expressions suivantes.

1. $A(x) = (x + 4)^2 = x^2 + 8x + 16$

2. $B(x) = \left(\frac{3}{5}x + 4\right) \left(\frac{3}{5}x - 4\right) = \frac{9}{25}x^2 - 16$

3. $C(x) = (2x + 5)^2 - 3(x + 1)(x - 5)$.

$$C(x) = 4x^2 + 20x + 25 - 3(x^2 - 4x - 5)$$

$$C(x) = 4x^2 + 20x + 25 - 3x^2 + 12x + 15 = x^2 + 32x + 40$$

Exercice 5 (4 points)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $D(x) = (5x - 1)^2 - 16$.

1. Développer et réduire $D(x)$.

$$D(x) = (5x - 1)^2 - 16 = 25x^2 - 10x + 1 - 16 = 25x^2 - 10x - 15.$$

2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $D(x) = (5x - 5)(5x + 3)$.

En développant,

$$(5x - 5)(5x + 3) = 25x^2 + 15x - 25x - 15 = 25x^2 - 10x - 15.$$

3. Résoudre l'équation $D(x) = 0$.

$$(5x - 5)(5x + 3) = 0 \text{ ssi } (5x - 5 = 0 \text{ ou } 5x + 3 = 0) \text{ ssi } (x = 1 \text{ ou } x = -\frac{3}{5})$$

$$S = \{1; -\frac{3}{5}\}$$

4. Résoudre l'équation $D(x) = -15$.

$$D(x) = -15 \text{ ssi } 25x^2 - 10x - 15 = -15 \text{ ssi } 25x^2 - 10x = 0 \text{ ssi } x(25x - 10) = 0 \text{ ssi } (x = 0 \text{ ou } 25x = 10) \text{ ssi } (x = 0 \text{ ou } x = \frac{2}{5}).$$

$$S = \{0; \frac{2}{5}\}.$$

Exercice 6 (2 points)

Un groupe de personnes souhaite réserver un chalet pour les sports d'hiver. La location du chalet coûte 800 euros pour la semaine. Le forfait pour skier toute la semaine est de 220 euros par personne, mais il existe un tarif "groupe" à 180 euros par personne à partir de 5 personnes d'un même groupe. Compléter sans justifier.

- Le prix payé par un groupe de 4 personnes est de $800 + 220 \times 4 = 1680$ euros.
- Le prix payé par un groupe de 7 personnes est de $800 + 180 \times 7 = 2060$ euros
- Compléter le script Python qui renvoie le coût total du séjour d'une semaine pour le groupe en fonction du nombre n de personnes.

```
def PrixTotal(n):
    if n >= 5 :
        P = 800 + n * 180
    else :
        P = 800 + n * 220
    return(P)
```

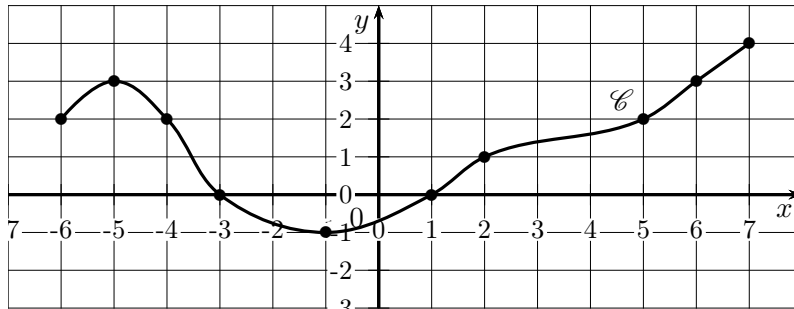
Seconde. Ds6. Correction du sujet 2

Exercice 7 (2 points)

- Compléter ci-dessous la définition :
Soit f une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} .
On dit que f est croissante sur I lorsque pour tous a, b appartenant à I , si $a < b$ alors $f(a) \leq f(b)$.
- Énoncer le théorème sur équation produit nul.
Un produit de facteurs est nul ssi l'un des facteurs est nul.

Exercice 8 (2 points)

On donne ci-dessous la courbe \mathcal{C} d'une fonction f .



Donner sans justification :

- le tableau de variation de f .

x	-6	-5	-1	7
$f(x)$	2	3	-1	4

- le tableau de signe de f .

x	-6	-3	1	7	
$f(x)$	+	0	-	0	+

Exercice 9 (8 points)

On donne ci-dessous le tableau de variation d'une fonction f définie sur $[-6; 4]$.

x	-6	-3	-1	3	4
$f(x)$	2	3	-2	3/2	1/2

De plus, les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont -2 et 1 .

- Donner le minimum de f sur $[-6; 4]$ et en quelle(s) valeur(s) il est atteint. (On ne demande pas de justifier).

Le minimum de f est -2 , il est atteint en -1 .

- Comparer $f(0, 3)$ et $f(0, 7)$. Justifier.
 $0, 3 < 0, 7$, et f est croissant sur l'intervalle $[-1; 3]$ (qui contient ces 2 nombres). Donc $f(0, 3) \leq f(0, 7)$.

- Compléter l'encadrement suivant (sans justification) :

Lorsque $x \in [-1; 4]$, $-2 \leq f(x) \leq 1, 5$.

- Donner un encadrement de $f(-5)$ et de $f(3, 3)$. Peut-on comparer ces deux nombres ?

On a $2 \leq f(-5) \leq 3$ et $0, 5 \leq f(3, 3) \leq 1, 5$.

On peut les comparer : $f(3, 3) \leq 1, 5 < 2 \leq f(-5)$.

$f(3, 3) < f(-5)$.

- Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifier.

(a) "Pour tout $x \in [-6; 4]$, $f(x) \leq 2, 5$."

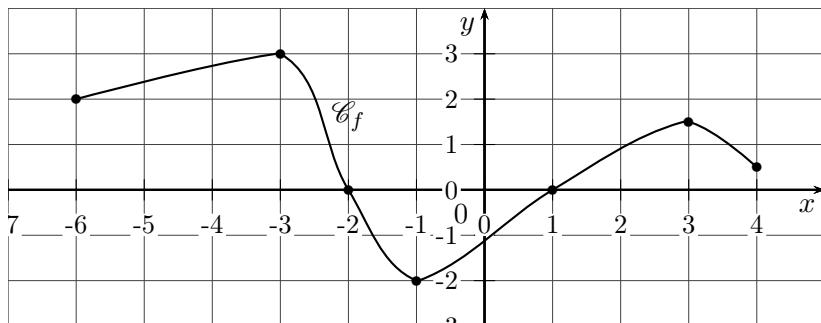
Faux : contre-exemple, pour $x = -3$, $f(-3) = 3 > 2, 5$.

(b) "Il existe au moins un réel x de $[-6; 4]$ tel que $f(x) > 2x$."

Vrai : $x = -6$ convient, car $f(-6) = 2$, et $2 \times (-6) = -12 < 2$.

- Tracer la courbe d'une fonction f compatible avec toutes les données de l'énoncé.

On n'oublie pas que $f(-2) = f(1) = 0$.



7. Dresser le tableau de signe de f (sans justifier).

x	-6	-2	1	4	
$g(x)$	+	0	-	0	+

Exercice 10 (4 points)

Développer et réduire les expressions suivantes.

1. $A(x) = (x - 6)^2 = x^2 - 12x + 36$

2. $B(x) = \left(\frac{1}{4}x + 5\right) \left(\frac{1}{4}x - 5\right) = \frac{1}{16}x^2 - 25.$

3. $C(x) = (2x + 5)^2 - 3(x + 1)(x - 5).$

$$C(x) = 4x^2 + 20x + 25 - 3(x^2 - 4x - 5)$$

$$C(x) = 4x^2 + 20x + 25 - 3x^2 + 12x + 15 = x^2 + 32x + 40$$

Exercice 11 (4 points)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $D(x) = (3x - 1)^2 - 49$.

1. Développer et réduire $D(x)$.

$$D(x) = (3x - 1)^2 - 49 = 9x^2 - 6x + 1 - 49 = 9x^2 - 6x - 48.$$

2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $D(x) = (3x - 8)(3x + 6)$.

On développe.

$$(3x - 8)(3x + 6) = 9x^2 + 18x - 24x - 48 = 9x^2 - 6x - 48 = D(x).$$

$$\text{Donc } D(x) = (3x - 8)(3x + 6).$$

3. Résoudre l'équation $D(x) = 0$.

On utilise la forme factorisée $D(x) = (3x - 8)(3x + 6)$.

Un produit de facteurs est nul ssi l'un des facteurs est nul.

$$3x - 8 = 0 \quad \text{ou} \quad 3x + 6 = 0$$

$$x = \frac{8}{3} \quad \text{ou} \quad x = -2$$

Les solutions sont $\frac{8}{3}$ et -2 .

4. Bonus. Résoudre l'équation $D(x) = -48$.

$$D(x) = -48 \text{ ssi } 9x^2 - 6x - 48 = -48 \text{ ssi } 9x^2 - 6x = 0 \text{ ssi } x(9x - 6) = 0 \text{ ssi } (x = 0 \text{ ou } 9x - 6 = 0) \text{ ssi } (x = 0 \text{ ou } x = \frac{2}{3}).$$

Les solutions sont 0 et $\frac{2}{3}$.

Exercice 12 (2 points)

Un groupe de personnes souhaite réserver un chalet pour les sports d'hiver. La location du chalet coûte 800 euros pour la semaine. Le forfait pour skier toute la semaine est de 200 euros par personne, mais il existe un tarif "groupe" à 150 euros par personne à partir de 5 personnes d'un même groupe. Compléter.

1. Le prix payé par un groupe de 4 personnes est de $800 + 4 \times 200 = 1600$ euros
2. Le prix payé par un groupe de 8 personnes est de $800 + 8 \times 150 = 2000$ euros
3. Compléter le script Python qui renvoie le coût total du séjour d'une semaine pour le groupe en fonction du nombre n de personnes.

```
def PrixTotal(n):
    if n >= 5 :
        P = 800 + n * 150
    else :
        P = 800 + n * 200
    return(P)
```