BTS CRSA1 – Barycentre

I Vecteurs : décomposition dans une base

Définition (base du plan)
Une base du plan est la donnée d'un couple $(\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{j})$ de vecteurs non colinéaires.

Propriété
Soit $(\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{j})$ une base du plan.
Tout vecteur $\overrightarrow{u}$ s'écrit de façon unique $\overrightarrow{u}=x\overrightarrow{i}+y\overrightarrow{j}$ où x et y sont des nombres réels.

Remarque
On dit que $(x;y)$ sont les coordonnées de $\overrightarrow{u}$ dans la base.

Exercice 1
Soit $ABCD$ un parallélogramme.

1. Exprimer $\overrightarrow{AC}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
2. Donner les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{DB}$ dans la base $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD})$.
3. Construire le point E tel que $\overrightarrow{AE}=-\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

Définition (base de l'espace)
Une base de l'espace est la donnée d'un triplet $(\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{j}\,;\overrightarrow{k})$ de vecteurs non coplanaires.

Propriété
Soit $(\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{j}\,;\overrightarrow{k})$ une base de l'espace.
Tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de l'espace s'écrit de façon unique $\overrightarrow{u}=x\overrightarrow{i}+y\overrightarrow{j}+z\overrightarrow{k}$ avec x, y, z réels.

II Vecteurs de l'espace

Dans tout le chapitre, on se place dans un repère orthonormé $(O;\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{j}\,;\overrightarrow{k})$ de l'espace.
La notion de vecteur vue dans le plan se généralise à l'espace.

1. On retrouve la relation de Chasles :
$$\text{Pour tous points } A,\ B \text{ et } C \text{ de l'espace, } \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}.$$
2. Dans un repère de l'espace, soient les points $A(x_A;y_A;z_A)$ et $B(x_B;y_B;z_B)$.
   — le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A)$
   — La norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est
$$AB=||\overrightarrow{AB}||=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$$
3. Le vecteur $\overrightarrow{u}(x;y;z)$ a pour norme $||\overrightarrow{u}||=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

III Barycentre de deux points

Définition (barycentre de deux points pondérés)
Soient A et B des points de l'espace et a, b des réels tels que $a+b \neq 0$. On dit que a et b sont des poids (ou pondérations).
On appelle barycentre des points (A,a) et (B,b) l'unique point G tel que $a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0}$.

Remarque
Le barycentre n'existe que si $a+b \neq 0$.

Propriété
Si $G = \text{Bar}\{(A,a);(B,b)\}$ alors $\overrightarrow{AG} = \dfrac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$.

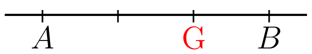
Remarque

1. Cette dernière relation permet de placer le point G.
2. Le barycentre G appartient toujours à la droite (AB).
3. Si $a=b$, alors G est le milieu du segment $[AB]$.

Exemple :

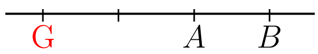
$\{(A,1);(B,2)\}$

$\overrightarrow{AG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$



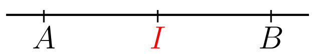
$\{(A,3);(B,-2)\}$

$\overrightarrow{AG} = -2\overrightarrow{AB}$



$\{(A,1);(B,1)\}$

$\overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$



Propriété
Pour tout point M, $a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}=(a+b)\overrightarrow{MG}$.

IV Barycentre de trois points

Définition (barycentre de trois points)
Soient a, b, c des réels tels que $a+b+c \neq 0$. On appelle barycentre des points (A,a), (B,b), et (C,c) l'unique point G tel que $a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}+c\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$

Propriété

1. Pour tout point M, $a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}+c\overrightarrow{MC}=(a+b+c)\overrightarrow{MG}$.
2. Si $a=b=c$ alors G est le centre de gravité du triangle ABC.

Théorème (du barycentre partiel / associativité)
Si H est le barycentre des 3 points (A,a), (B,b), et (C,c) (avec $a+b+c \neq 0$),
et si G est le barycentre des deux points (A,a) et (B,b) (avec $a+b \neq 0$),
alors H est le barycentre de $(H,a+b)$ et (C,c).

Propriété (coordonnées du barycentre)
Dans un repère de l'espace, soient les points $A(x_A;y_A;z_A)$, $B(x_B;y_B;z_B)$ et $C(x_C;y_C;z_C)$.
Le barycentre G des points (A,a), (B,b) et (C,c) (avec $a+b+c\neq 0$) a pour coordonnées :

$$x_G=\frac{ax_A+bx_B+cx_C}{a+b+c}\ ;\quad y_G=\frac{ay_A+by_B+cy_C}{a+b+c}\ ;\quad z_G=\frac{az_A+bz_B+cz_C}{a+b+c}$$

Remarque (Geogebra)
Sur Geogebra, on peut définir le barycentre avec la commande `(aA+bB+cC)/(a+b+c)`.

V Exercices

Exercice 2
Soit le système de points pondérés $(A,3)$ et $(B,1)$.

1. Justifier que le barycentre G existe et donner une relation vectorielle qui le caractérise.
2. Exprimer $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.
3. Construire le point G sur la droite (AB).

Exercice 3

1. Montrer que si G est le barycentre du système (A,m_1) et (B,m_2), alors $\overrightarrow{AG}=\dfrac{m_2}{m_1+m_2}\overrightarrow{AB}$.
2. Dans chaque cas, exprimer $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ puis placer G sur la droite (AB) .
   (a) G est le barycentre de $(A,2)$ et $(B,5)$.
   (b) G est le barycentre de $(A,-2)$ et $(B,1)$.

Exercice 4
On donne $\overrightarrow{AK}=\dfrac{3}{8}\overrightarrow{AB}$.
Proposer des pondérations a et b telles que K soit le barycentre de (A,a) et (B,b).