Chapitre 3 : Information chiffrée

I Proportion dans une population

Vocabulaire.
Les éléments qui constituent une population sont les individus de cette population.
Le nombre d'éléments d'une population E est appelé l'effectif de E.
Une sous-population A de E est une population dont tous les individus sont dans E. On dit alors que A est inclus dans E et on note $A \subset E$.

Définition
Soit A une sous population d'une population E non vide.
Notons n_A l'effectif de A et n_E l'effectif de E.
La proportion (ou fréquence) de A dans E est $f = \dfrac{n_A}{n_E}$.
On retiendra :

$$\text{fréquence} = \frac{\text{effectif}}{\text{effectif total}}$$

Remarque

1. Une proportion (fréquence) est un réel compris entre 0 et 1 (puisque $0 \leqslant n_A \leqslant n_E$).
2. Une proportion peut s'écrire sous forme de fraction, de nombre décimal, ou de pourcentage (parfois en arrondissant).
3. On dira que A représente x % de E si $\dfrac{n_A}{n_E} = \dfrac{x}{100}$.

Exercice 1 (Calcul mental)

1. Écrire les proportions sous forme de pourcentage : $\dfrac{1}{4}$; $\dfrac{2}{5}$; $\dfrac{9}{10}$; $\dfrac{1}{8}$; $\dfrac{4}{5}$
2. Écrire les proportions sous forme de pourcentage : 0,02 ; 0,95 ; 0,003 ; 0,25 ; 0,0358
3. Écrire les pourcentages sous forme décimale : 1,5 % ; 10 % ; 0,3 % ; 60 % ; 45,2 %
4. Écrire les proportions sous forme de fraction : 0,02 ; 60 % ; 5 % ; 0,7 ; 0,25

Remarque
La relation $p = \dfrac{n_A}{n_E}$ peut également servir à trouver un effectif.
En particulier, si l'on connaît p et n_E, on a $n_A = p \times n_E$.

Exercice 2 (calcul mental)
Calculer :

1. 1% de 428
2. 2 % de 300
3. 5 % de 4000
4. 20 % de 60

Exercice 3
On interroge un groupe de 500 personnes composé de 60% de femmes. 20% des hommes ne font pas de sport, et 15 % des femmes ne font pas de sport.

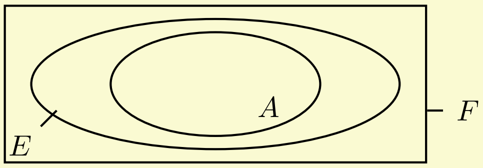
1. Compléter les effectifs dans le tableau.

	Sportifs	Non sportifs	Total
Hommes			
Femmes			
Total			500

2. Déterminer les proportions suivantes, puis interpréter en pourcentage :

(a) p_1 de sportifs sur l'ensemble du groupe,
(b) p_2 d'hommes sportifs dans le groupe,
(c) p_3 de femmes parmi les sportifs,
(d) p_4 d'hommes parmi les non sportifs.

Propriété (Proportions et inclusions successives)
Soit A une sous-population de E, et E une sous population de F.



Si p est la proportion de A dans E et p' celle de E dans F, alors la proportion de A dans F est $p \times p'$.

Démonstration
$p \times p' = \frac{n_A}{n_E} \times \frac{n_E}{n_F} = \frac{n_A}{n_F}$, qui est bien la proportion de A dans F. □

Exercice 4
Dans une famille, $\frac{2}{3}$ des membres sont musiciens, et parmi ces derniers, $\frac{3}{4}$ jouent du violon.
Déterminer la proportion des membres de la famille qui jouent du violon.

Exercice 5
Un laboratoire teste l'efficacité d'un vaccin sur des souris.
Toutes ont reçu le virus étudié, certaines ont été vaccinées mais pas les autres.
Certaines ont développé la maladie, d'autres pas.
Sur 320 souris étudiées, 170 ont été vaccinées.
230 souris ont développé la maladie, et parmi celles-ci 130 avaient reçu le vaccin.

1. Compléter les effectifs dans le tableau.

	Souris malades	Souris non malades	Total
Souris vaccinées			
Souris non vaccinées			
Total			

2. Déterminer les proportions suivantes, en pourcentage à 1 % près :
   (a) p_1 de souris n'ayant pas développé la maladie.
   (b) p_2 de souris non vaccinées.
   (c) p_3 de souris ayant développé la maladie parmi celles qui ont été vaccinées.
   (d) p_4 de souris ayant développé la maladie parmi celles qui n'ont pas été vaccinées.
3. Que peut-on penser de l'efficacité du vaccin ?

II Taux d'évolution

Définition
Soient y_1, et y_2 deux nombres positifs, avec $y_1 \neq 0$.
Le taux d'évolution de y_1 à y_2 est le nombre

$$t = \frac{y_2 - y_1}{y_1}.$$

Remarque

1. L'évolution est une hausse ssi $t > 0$.
   L'évolution est une baisse ssi $t < 0$.
2. Attention en utilisant la calculatrice : pour calculer le taux d'évolution de y_1 à y_2, on doit taper $(y_2 - y_1)/y_1$ avec les parenthèses !
3. Pour interpréter le résultat en pourcentage, penser à multiplier par 100.
4. Un taux d'évolution n'est pas une proportion :
   — une proportion est toujours un nombre entre 0 et 1.
   — un taux d'évolution peut être n'importe quel nombre plus grand que -1.

Exercice 6
Un prix passe de 480 à 420 euros.
Calculer le taux d'évolution, et donner le résultat sous forme de pourcentage.
Réponse [1]

Remarque
La variation absolue de y_1 à y_2 est le nombre $(y_2 - y_1)$.

Exercice 7 (calcul mental)
Interpréter les taux d'évolution suivants en évolution exprimée en pourcentage. On arrondira à 0,1 % près.

1. $t = 0,327$
2. $t = -0,04$
3. $t = -0,73815$
4. $t = 2,3658$

II.1 Coefficient multiplicateur

Définition (et propriété)
Soient y_1, et y_2 deux nombres positifs, avec $y_1 \neq 0$.
Si t est le taux de y_1 à y_2, alors le coefficient multiplicateur pour passer de y_1 à y_2 est $c = 1 + t$.
Autrement dit, $y_2 = (1 + t) \times y_1$.

Démonstration
$t = \dfrac{y_2 - y_1}{y_1}$, donc $y_2 - y_1 = t \times y_1$. Donc $y_2 = y_1 + t \times y_1 = (1 + t) \times y_1$. □

Remarque
La formule s'applique aussi dans le cas d'une baisse (où $t < 0$).
Dans le cas d'une hausse, $c > 1$.
Dans le cas d'une baisse, $c < 1$.

Exercice 8 (calcul mental)
Donner le taux puis le coefficient multiplicateur associé aux évolutions suivantes :

1. une hausse de 6 %
2. une hausse de 0,35 %
3. une baisse de 12 %
4. une baisse de 7 %

Remarque
La formule $y_2 = (1 + t)y_1$ peut être est utilisée lorsqu'on cherche y_2, mais aussi lorsqu'on cherche y_1.
En effet, pour $t > -1$, on a $y_1 = \dfrac{y_2}{(1 + t)}$.

1. $t = \dfrac{420 - 480}{480} = -0.125$, soit une baisse de 12.5 %.

Exercice 9
Après une remise de 20%, un article coûte 127,2 euros. Quel était son prix initial ?

Exercice 10
Compléter le tableau. On ne demande pas de justifier les résultats.

valeur initiale	valeur finale	taux d'évolution	coefficient multiplicateur	évolution en pourcentage
480	530			
5000		-0,13		
250				hausse de 22%
7250			0,91	
	1300		1,06	

II.2 Évolutions successives, taux global

Théorème
Si une grandeur subit deux évolutions successives de taux t_1 et t_2, alors le taux d'évolution global t_g est donné par :

$$1 + t_g = (1 + t_1) \times (1 + t_2)$$

On retiendra que le coefficient multiplicateur global est le produit des coefficients multiplicateurs :

$$c_g = c_1 \times c_2.$$

Remarque
Attention, pour calculer le taux global t_g, on a donc

$$t_g = (1 + t_1)(1 + t_2) - 1$$

Exemple :
Un prix augmente de 15 % , puis de 20 %. Calculer le taux d'augmentation global.

$$\begin{aligned} 1 + t_g &= (1 + t_1)(1 + t_2) \\ 1 + t_g &= 1,15 \times 1,2 \\ t_g &= 1,15 \times 1,2 - 1 \\ t_g &= 0,38 \end{aligned}$$

Le prix a globalement augmenté de 38 %.

Remarque
Attention : en général, le taux global n'est pas la somme des taux des évolutions.

Exercice 11
Déterminer le taux global d'évolution à l'issue d'une hausse de 40 % suivie d'une baisse de 40%.

II.3 Taux d'évolution réciproque

Théorème
Si le taux d'évolution pour passer de y_1 à y_2 est t, le taux t' de l'évolution réciproque (qui passe de y_2 à y_1) est donné par :

$$1 + t' = \frac{1}{1 + t}$$

On retiendra que les coefficients multiplicateurs sont inverses l'un de l'autre : $c' = \dfrac{1}{c}$.

Exercice 12
Déterminer l'évolution réciproque d'une baisse de 20 %.