

CRSA2 – Correction du devoir maison n° 2

Exercice 1 (13 page 169)

Résoudre à l'aide d'une matrice le système.
$$\begin{cases} 3x + 4y + 2z = 2 \\ 5x - 2y - z = -1 \\ x - 4y + 3z = 13 \end{cases}$$

Cela équivaut au système $AX = B$ en posant les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 5 & -2 & -1 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\text{et } B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Avec la calculatrice, on obtient l'inverse de A .

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/13 & 2/13 & 0 \\ 8/65 & -7/130 & -1/10 \\ 9/65 & -8/65 & 1/5 \end{pmatrix}$$

On sait que lorsque A est inversible, le système admet une unique solution qui est donnée par $X = A^{-1} \times B$.

$$\text{Ainsi, } X = A^{-1} \times B = \begin{pmatrix} 1/13 & 2/13 & 0 \\ 8/65 & -7/130 & -1/10 \\ 9/65 & -8/65 & 1/5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

On obtient donc $x = 0$, $y = -1$ et $z = 3$.

L'unique solution du système est le triplet $(0; -1; 3)$.

Exercice 2 (16 page 169)

Soit a un réel donné.

$$\text{On pose } M(a) = \begin{pmatrix} 1 & 2a & a^2 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Quelle est la matrice $M(0)$?

Pour $a = 0$, on obtient la matrice avec 1 sur la diagonale et 0 ailleurs, c'est la matrice identité d'ordre 3.

$$\text{Donc } M(0) = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Calculer $M(a) \times M(b)$ pour tous réels a et b .

$$M(b) = \begin{pmatrix} 1 & 2b & b^2 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M(a) = \begin{pmatrix} 1 & 2a & a^2 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2a + 2b & b^2 + 2ab + a^2 \\ 0 & 1 & a + b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } M(a) \times M(b) = \begin{pmatrix} 1 & 2(a+b) & (a+b)^2 \\ 0 & 1 & a+b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En effet, pour le coefficient à la fin de la première ligne, $c_{1,3} = b^2 + 2ab + a^2 = (a+b)^2$.

Ainsi, on a, pour tous réels a et b , $M(a) \times M(b) = M(a+b)$.

3. Déterminer b pour que $M(a) \times M(b) = I_3$.

$M(a) \times M(b) = I_3$ ssi $M(a+b) = I_3$ ssi $a+b = 0$ ssi $a = -b$.

$M(a) \times M(b)$ est la matrice identité lorsque $b = -a$.