Terminale STL. Spécialité. Correction du devoir maison n° 1

Exercice 1

Calculer les intégrales suivantes (on donnera les valeurs exactes).

1. $I = \displaystyle\int_1^2 6x + \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

   En posant $f(x) = 6x + \dfrac{1}{x^2}$, une primitive de f sur $[1;2]$ est la fonction F définie par $F(x) = 6 \times \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{x} = 3x^2 - \dfrac{1}{x}$.

   $$\boxed{I = \left[3x^2 - \frac{1}{x}\right]_1^2 = 3 \times 2^2 - \frac{1}{2} - \left(3 \times 1^2 - \frac{1}{1}\right) = 12 - \frac{1}{2} - 2 = 9,5.}$$

2. $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2t)\,\mathrm{d}t$.

   Soit $f(t) = \cos(2t)$. Une primitive de f est $F(t) = \dfrac{1}{2}\sin(2t)$.

   $$\boxed{J = \left[\frac{1}{2}\sin(2t)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\sin(2 \times \frac{\pi}{4}) - \frac{1}{2}\sin(2 \times 0) = \frac{1}{2}\sin(\frac{\pi}{2}) - 0 = \frac{1}{2}}$$

Exercice 2

Lors de la propagation d'une épidémie de gastro-entérite, on modélise par la fonction f définie sur $[0;10]$ par $f(t) = 20t^2 - 2t^3$ le nombre des malades présents dans la population t jours après l'apparition de la maladie.

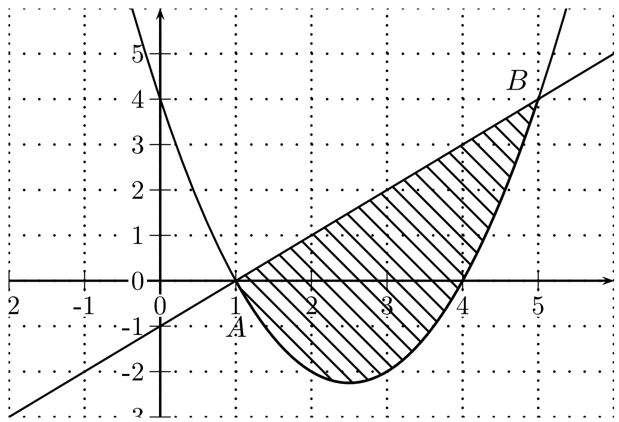
Déterminer le nombre moyen de malades sur la période des 10 premiers jours.

$$m = \frac{1}{10-0}\int_0^{10} f(t)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{10}\left[20\frac{t^3}{3} - 2\frac{t^4}{4}\right]_0^{10} = \frac{1}{10} \times \left(\frac{5000}{3} - 0\right) = \frac{500}{3}.$$

$\boxed{\text{Sur la période des 10 premiers jours, le nombre moyen de malades est d'environ 167 malades par jour.}}$

Exercice 3

Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 5x + 4$ et $g(x) = x - 1$. On admet que les courbes se coupent aux points A et B de coordonnées respectives $A(1;0)$ et $B(5;4)$ et que $f(x) \leqslant g(x)$ pour tout réel x vérifiant $1 \leqslant x \leqslant 5$.



Calculer l'aire de la partie hachurée du plan.

L'aire est $\displaystyle\int_1^5 (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x$ car $g(x) \geqslant f(x)$ sur $[1;5]$.

$$\int_1^5 (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x = \int_1^5 (x - 1 - (x^2 - 5x + 4))\,\mathrm{d}x = \int_1^5 (-x^2 + 6x - 5)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^3}{3} + 3x^2 - 5x\right]_1^5.$$

$$\int_1^5 (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x = -\frac{5^3}{3} + 3 \times 5^2 - 5 \times 5 - (-\frac{1}{3} + 3 - 5) = -\frac{124}{3} + 52 = \frac{-124 + 156}{3} = \frac{32}{3}$$

$\boxed{\text{L'aire de la partie hachurée est de } \frac{32}{3}\text{, soit environ 10,7 ua.}}$