Chapitre 9 : Fonctions affines

I Définition et représentation graphique d'une fonction affine

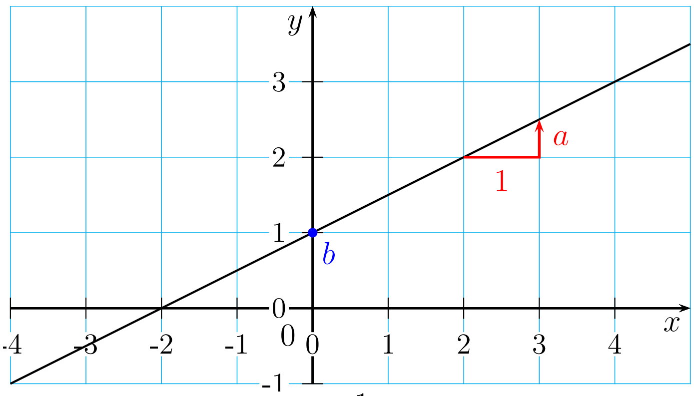
Définition
Une fonction f est affine s'il existe deux nombres réels a et b tels que pour tout x réel $f(x) = ax + b$.
On peut toujours définir une fonction affine sur $\mathbb{R}$.

Exemple : la fonction f donnée par $f(x) = 2x + 3$.

Théorème (admis)
La représentation graphique d'une fonction affine est une droite non parallèle à l'axe des ordonnées.

Vocabulaire :
Soit f définie par $f(x) = ax + b$.

- Le réel a est le coefficient directeur de la droite représentant f.
  Il donne l'inclinaison de la droite : « quand on avance de 1, on "monte" de a ».
- le réel b est l'ordonnée à l'origine de la droite :
  La droite coupe l'axe des orconnées en le point de coordonnées $(0; b)$.



$$f(x) = \frac{1}{2}x + 1$$

Méthode pour tracer la représentation graphique d'une fonction affine :
Comme c'est une droite, il suffit de construire deux points.

- On choisit deux valeurs de x, (qui donnent des calculs simples si possible)
- on calcule les images correspondantes,
- on place les points obtenus, et on trace la droite les reliant.

Exercice 1
Tracer la courbe de la fonction définie par $f(x) = -\frac{2}{5}x + 3$.

x	0	5
y	...	...

Remarque (cas particuliers)

- Lorsque $a = 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = b$.
  La fonction est dite constante. La courbe de f est alors un droite parallèle à l'axe des abscisses.
- Lorsque $b = 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax$.
  La fonction est dite linéaire. La courbe de f est une droite passant par O.

II Sens de variation d'une fonction affine

Théorème (variation des fonctions affines)
Soit f la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$, avec a et b réels.

1. f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ ssi $a > 0$.
2. f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ ssi $a < 0$.
3. f est constante sur $\mathbb{R}$ ssi $a = 0$.
   Dans ce cas, $\mathscr{C}_f$ est une droite parallèle à l'axe des abscisses.

Démonstration
Soient u et v deux réels, tels que $u < v$.
$f(u) - f(v) = au + b - (av + b) = a(u - v)$.
Comme $u < v$, on a $u - v < 0$.
Ainsi,

— si $a < 0$, $f(u) - f(v) = a(u - v) > 0$, soit $f(u) > f(v)$.
  Si $a < 0$, alors f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
— si $a > 0$, $f(u) - f(v) = a(u - v) < 0$, soit $f(u) < f(v)$.
  Si $a > 0$, alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
— si $a = 0$, pour tous réels u et v, $f(u) = f(v)$ et f est constante sur $\mathbb{R}$.

D'où le résultat. □

Exercice 2
Déterminer le sens de variation sur $\mathbb{R}$ des fonctions affines suivantes.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 5x - 11$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = -13x - 6$.
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = 0,4 - x$.
4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $k(x) = \frac{1}{5}x - 8$.

Propriété
Soit f la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$, avec a et b réels.
Pour tous nombres réels distincts u et v,

$$\frac{f(v) - f(u)}{v - u} = a.$$

Démonstration
Soient u et v deux réels distincts.
$\frac{f(v) - f(u)}{v - u} = \frac{av + b - (au + b)}{v - u} = \frac{av - au}{v - u} = \frac{a(v - u)}{v - u} = a.$ □

Remarque
De façon générale, le nombre $\frac{f(v) - f(u)}{v - u}$ est le taux d'accroissement de la fonction f entre les réels u et v.
Pour une fonction affine, le taux d'accroissement est constant et toujours égal au coefficient directeur a.

Méthode pour déterminer l'expression d'une fonction affine f dont on connaît la représentation graphique :

— Repérer deux points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ sur $\mathscr{C}_f$.

— Le coefficient directeur est $a = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

— Alors, $f(x) = ax + b$, et a est connu. On trouve b en remplaçant les coordonnées d'un des points A ou B dans la relation précédente.

Exercice 3
Dans chaque cas, déterminer l'expression de la fonction affine f.

1. $f(2) = 5$ et $f(3) = 1$.
2. La courbe de f passe par $A(-2; 3)$ et $B(1; 4)$.

III Signe de $ax + b$. Tableaux de signes

Théorème (signe de $ax + b$)
Soit f la fonction affine définie par $f(x) = ax + b$, avec a et b réels, et $a \neq 0$.
Alors $f(x) = 0$ pour $x = -\dfrac{b}{a}$.

— Si $a > 0$, alors le signe de $f(x)$ est donné par :

x	$-\infty$		$-b/a$		$+\infty$
$f(x) = ax + b$		$-$	0	$+$	

— Si $a < 0$, alors le signe de $f(x)$ est donné par :

x	$-\infty$		$-b/a$		$+\infty$
$f(x) = ax + b$		$+$	0	$-$	

Démonstration
Soient a, b des réels, $a \neq 0$.
$ax + b = 0$ ssi $ax = -b$ ssi $x = -\dfrac{b}{a}$ (on peut diviser par $a \neq 0$).
Supposons $a > 0$.
Alors $ax + b > 0$ ssi $ax > -b$ ssi $x > -\dfrac{b}{a}$ (car on divise par $a > 0$, le sens de l'inégalité est conservé).
Supposons $a < 0$.
Alors $ax + b > 0$ ssi $ax > -b$ ssi $x < -\dfrac{b}{a}$ (car on divise par $a < 0$, le sens change). □

Exemple :
Dresser le tableau de signe des fonctions affines suivantes.

1. $f(x) = 2x - 6$.
   $a = 2$, et $b = -6$.
   $2x - 6 = 0$ lorsque $x = 3$.
   Comme $a = 2 > 0$, on a :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$2x - 6$		$-$	0	$+$	

Cela signifie que $2x-6>0$ lorsque $x\in]3;+\infty[$, que $2x-6<0$ lorsque $x\in]-\infty;3[$, et que $2x-6=0$ lorsque $x=3$.

2. $g(x)=2-7x$.
   $a=-7$, $b=2$.
   $2-7x=0$ ssi $x=\dfrac{2}{7}$.
   Comme $a=-7<0$, on a :

x	$-\infty$		$2/7$		$+\infty$
$2-7x$		$+$	0	$-$	

III.1 Inéquations produits, inéquations quotients

Propriété (« règle des signes »)
Le produit (ou quotient) de deux nombres positifs est positif.
Le produit (ou quotient de deux nombres négatifs est positif.
Le produit (ou quotient) de deux nombres de signes contraires est négatif.

Méthode pour les inéquations

1. Faire apparaître 0,
2. Factoriser (mettre au même dénominateur s'il y a des divisions),
3. Faire un tableau de signe (une ligne pour chaque facteur),
4. Conclure (donner l'ensemble solution sous forme d'intervalle ou de réunion d'intervalles).

Exercice 4 (corrigé)
Résoudre l'inéquation $6x<2x^2$.

$$\begin{array}{rcl} 6x & < & 2x^2 \\ 6x-2x^2 & < & 0 \\ x(6-2x) & < & 0 \end{array}$$

Valeurs clés :
$x=0$
$6-2x=0$ lorsque $x=3$.

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$6-2x$		$+$		$+$	0	$-$	
$x(6-2x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$\boxed{\text{L'ensemble solution est } S=]-\infty;0[\cup]3;+\infty[.}$

Exercice 5 (corrigé)
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{x+5}{x} \leqslant 4$.

$$\begin{aligned}
\frac{x+5}{x} &\leqslant 4\\
\frac{x+5}{x} - 4 &\leqslant 0\\
\frac{x+5}{x} - \frac{4x}{x} &\leqslant 0\\
\frac{x+5-4x}{x} &\leqslant 0\\
\frac{5-3x}{x} &\leqslant 0
\end{aligned}$$

Valeurs clés :
$5-3x=0$ lorsque $x=\dfrac{5}{3}$.
$x=0$ (valeur interdite).
Remarque : lorsque $x=0$, l'inéquation n'est pas définie (on dit que 0 est valeur interdite), on l'indique par les doubles barres dans la dernière ligne du tableau de signes pour $x=0$.

x	$-\infty$		0		$5/3$		$+\infty$
$5-3x$		$+$		$+$	0	$-$	
x		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{5-3x}{x}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

$$\boxed{S = \left]-\infty;0\right[\cup \left[\frac{5}{3};+\infty\right[.}$$

Attention aux crochets dans l'ensemble solution, 0 est exclu car valeur interdite.