Correction du devoir maison n° 12.
Lois de probabilité à densité

Exercice 1 (n° 67 p 338)

La variable aléatoire T qui représente la durée de vie, en jours, d'un composant d'une console de jeux suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = \dfrac{1}{700}$.

1. Quelle est la durée de vie moyenne du composant ?
   $E(T) = \dfrac{1}{\lambda} = 700$.
   $\boxed{\text{La durée de vie moyenne du composant est de 700 jours (soit environ un an et 11 mois).}}$

2. Calculer la probabilité que le composant n'ait pas de défaillance durant les 120 premiers jours.
   $P(T \geqslant 120) = \mathrm{e}^{-120\times\lambda} = \mathrm{e}^{-\frac{12}{70}} \approx 0,842$.
   $\boxed{\text{La probabilité que le composant n'ait pas de défaillance pendant les 120 premiers jours est d'environ 0,842.}}$

3. Calculer la probabilité que le composant soit toujours en fonctionnement au bout de 2 ans.
   Il faut convertir en jours. $2 \times 365 = 730$.
   2 ans représentent 730 jours.
   $P(T \geqslant 730) = \mathrm{e}^{-\lambda\times 730} = \mathrm{e}^{-\frac{730}{700}} \approx 0,352$.
   $\boxed{\text{La probabilité que le composant soit toujours en fonctionnement au bout de 2 ans est d'environ 0,352.}}$

4. Calculer la probabilité que le composant fonctionne encore au bout de 5 ans, sachant qu'il fonctionne encore au bout de 2 ans.
   En considérant qu'une année dure 365 jours, 2 ans font 730 jours, 3 ans font 1095 jours, 5 ans font 1825 jours.
   D'après la propriété "sans mémoire" de la loi exponentielle,

$$\begin{aligned} P_{T\geqslant 730}(T \geqslant 1825) &= P(T \geqslant 1095) \\ &= \mathrm{e}^{-1095\lambda} \\ &= \mathrm{e}^{-\frac{1095}{700}} \\ &\approx 0,209 \end{aligned}$$

5. Au bout de combien de temps aura-t-on 10 % des composants en panne ?
   On cherche la durée t au bout de laquelle 10 % des composants sont en panne, ce qui revient à dire que 90% des composants ont une durée de vie supérieure à t.
   On cherche donc la durée t telle que $P(T \geqslant t) = 0,9$.

$$\begin{aligned} P(T \geqslant t) &= 0,9 \\ \mathrm{e}^{-\lambda t} &= 0,9 \\ -\lambda t &= \ln(0,9) \\ t &= -\frac{\ln(0,9)}{\lambda} \\ t &= -700\ln(0,9) \\ t &\approx 73,75 \end{aligned}$$

   $\boxed{\text{Au bout de 74 jours, 10 \% des composants sont en panne.}}$
   De façon équivalente, on pouvait résoudre $P(T < t) = 0,1$.

6. Deux composants A et B de ce type sont montés sur la console. On note T_A et T_B les variables aléatoires correspondant aux durées de vie de ces composants. On suppose que $(T_A > 300)$ et $T_B > 300)$ sont indépendants.
   Calculer la probabilité que la console fonctionne après 300 jours, les composants A et B étant montés en série.
   L'événement "la console fonctionne encore au bout de 300 jours" est donc $(T_A > 300) \cap (T_B > 300)$.

Comme ces deux événements sont indépendants,

$$\begin{aligned}
P[(T_A > 300) \cap (T_B > 300)] &= P(T_A > 300) \times P(T_B > 300) \\
&= \mathrm{e}^{-300\lambda} \times \mathrm{e}^{-300\lambda} \\
&= \left(\mathrm{e}^{-\frac{3}{7}}\right)^2 \\
&= \mathrm{e}^{-\frac{6}{7}} \\
&\approx 0,424
\end{aligned}$$

La probabilité que la console fonctionne encore au bout de 300 jours est d'environ 0,424.

Exercice 2 (sujet C page 349)

Les deux rives d'un estuaire sont reliées par des bateaux qui quittent la rive nord exactement toutes les 10 minutes. Mr Dulac habite sur la rive nord, et son arrivée au point d'embarquement se fait au hasard.

1. Le temps, en minutes, séparant l'arrivée de Mr Dulac à l'embarcadère du prochain départ définit une variable aléatoire T qui suit une loi uniforme.

   (a) Quel est le temps d'attente moyen ?
   Comme il y a un bateau qui part toutes les 10 minutes, T suit la loi uniforme sur $[0; 10]$.
   $E(T) = \dfrac{a+b}{2} = \dfrac{0+10}{2} = 5.$
   Mr Dulac attend en moyenne 5 minutes.

   (b) Montrer que la probabilité qu'un jour donné, Mr Dulac attende plus de 7 minutes est de 0,3.

$$\begin{aligned}
P(T > 7) &= 1 - P(T < 7) \\
&= 1 - \frac{7-0}{10-0} \\
&= 1 - 0,7 \\
&= 0,3
\end{aligned}$$

2. Mr Dulac séjourne 10 jours sur la rive nord.
   Le nombre de jours où son attente est supérieure à 7 minutes définit une variable aléatoire X.
   On suppose que l'arrivée de Mr Dulac à l'embarcadère se fait de façon indépendante d'un jour à l'autre.

   (a) Quelle est la loi suivie par X ? Déterminer $E(X)$.
   On répète 10 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes de paramètre $p = P(T > 7) = 0,3$.
   Comme X est la variable aléatoire qui compte le nombre de "succès", X suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,3$.
   $E(X) = n \times p = 10 \times 0,3 = 3.$
   En moyenne, il y aura 3 jours sur les 10 où le temps d'attente sera supérieur à 7 minutes.

   (b) Calculer, à 10^{-3} près, la probabilité que Mr Dulac n'attende jamais plus de 7 minutes.
   $P(X = 0) = \binom{10}{0} p^0 (1-p)^{10} = 1 \times (1 - 0,3)^{10} = 0,7^{10} \approx 0,028.$
   La probabilité que Mr Dulac n'attende jamais plus de 7 minutes est d'environ 0,028.

   (c) Calculer $P(X \leqslant 5)$ à 10^{-3} près.
   Avec la calculatrice, $P(X \leqslant 5) \approx 0,953$.
   Texas : BinomFRep(n,p,k) pour calculer $P(X \leqslant k)$.
   Casio : BinomialCD(k,n,p) pour calculer $P(X \leqslant k)$.