Chapitre 12 : Fonctions de référence

I La fonction carré

Définition
La fonction carré est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

Exercice 1

1. Calculer l'image par la fonction carré des réels -3 ; -1 ; 0 ; 2 ; $\sqrt{7}$; $\dfrac{11}{3}$
2. Montrer que f n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que f n'est pas non plus décroissante sur $\mathbb{R}$.

Théorème (sens de variation)
La fonction carré $f : x \mapsto x^2$ est décroissante sur $]-\infty; 0]$ et croissante sur $[0; +\infty[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^2	$\searrow$	0	$\nearrow$

Démonstration
Soient a, $b \in]-\infty; 0]$. Supposons que $a < b$.

$$\begin{aligned} f(a) - f(b) &= a^2 - b^2 \\ &= (a+b)(a-b) \end{aligned}$$

Comme on suppose que $a < b$, $a - b < 0$.
Comme a et b sont négatifs (ils appartiennent $]-\infty; 0]$), $a + b < 0$.
D'après la règle des signes, $f(a) - f(b) = a^2 - b^2 > 0$.
Ainsi, pour tous a et b appartenant à l'intervalle $]-\infty; 0]$, si $a < b$, alors $f(a) > f(b)$.
La fonction carré est décroissante sur l'intervalle $]-\infty; 0]$.
On montre de façon analogue qu'elle est croissante sur $[0; +\infty[$. □

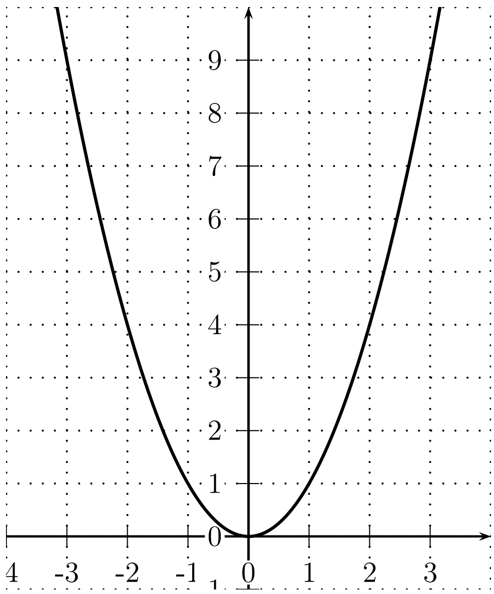
Exercice 2 (comparaison et encadrement)

1. Comparer sans calculatrice les carrés des réels a et b.
   (a) $a = 5,7$ et $b = 5,8$
   (b) $a = -3,17$ et $b = -3,16$
2. Donner le meilleur encadrement de x^2 dans chacun des cas suivants. Justifier.
   (a) $4 < x < 5$
   (b) $-7 \leqslant x \leqslant -6$
   (c) $-5 \leqslant x \leqslant 2$
   (d) $-4 < x \leqslant 9$

Tableau de valeurs

x	-3	-2	-1	$-0,5$	0	0,5	1	2	3
x^2									

Propriété (représentation graphique)
Dans un repère orthogonal, la courbe représentative de la fonction carré est une **parabole** de sommet O.
L'axe des ordonnées (Oy) est axe de symétrie de la courbe.



Remarque

— La symétrie par rapport à l'axe des ordonnées se traduit par :
pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(-x)^2 = x^2$.
Autrement dit, deux opposés ont le même carré.
On dit que la fonction carré est **paire**.

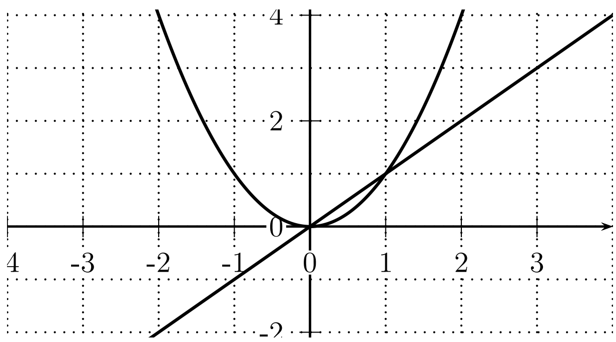
— L'ensemble des valeurs prises par la fonction carré est $[0; +\infty[$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geqslant 0$ (un carré est toujours positif).

Exercice 3
Considérons la fonction carré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

1. Déterminer les antécédents de 9 par f.
2. Rechercher les antécédents de -2 par f.
3. Soit k un nombre réel.
   Résoudre suivant les valeurs de k l'équation $x^2 = k$.

Exercice 4 (comparaison de x et de x^2)
On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x$ et $g(x) = x^2$.

1. Donner un réel a vérifiant $a^2 > a$, et un réel b vérifiant $b^2 < b$.
2. Factoriser $f(x) - g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. Déterminer le tableau de signe de $f(x) - g(x)$ sur $\mathbb{R}$.
4. En déduire la comparaison de x^2 et x, et la position relative des courbes de f et g.
   Vérifier la cohérence avec le graphique ci-dessous.

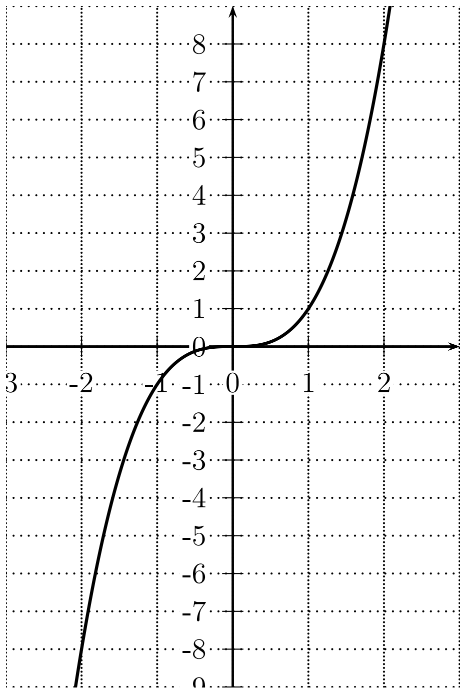


II La fonction cube

Définition
La fonction cube est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.

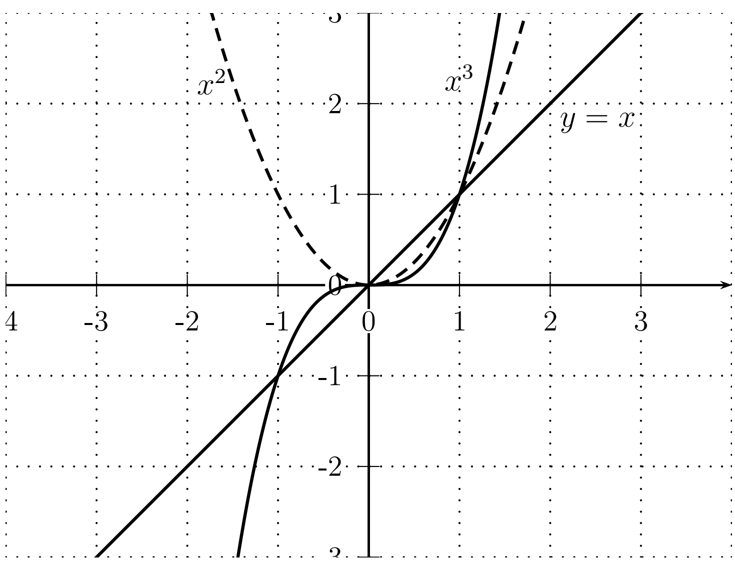
Propriété (admise)
La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Remarque
La fonction cube est **impaire**. La courbe est symétrique par rapport au point O : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = -f(x)$



Exercice 5 (comparaison de x, x^2 et x^3 sur $[0;+\infty[$)
On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x$, $g(x) = x^2$, et $h(x) = x^3$.

1. Factoriser l'expression $g(x) - h(x)$ sur $\mathbb{R}$, puis étudier son signe sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire la comparaison de x^2 et x^3 sur $\mathbb{R}$.
3. À l'aide du résultat de l'exercice précédent et de celui-ci, comparer x, x^2 et x^3 lorsque $x \geqslant 0$. Vérifier grahiquement.



III La fonction inverse

Définition
La fonction inverse est la fonction f définie pour tout réel x non nul par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.
Son ensemble de définition est $D = \mathbb{R}^* =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.

Remarque
La fonction inverse n'est pas définie en 0 (0 n'a pas d'inverse).

Théorème
La fonction inverse est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty; 0[$,
et strictement décroissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

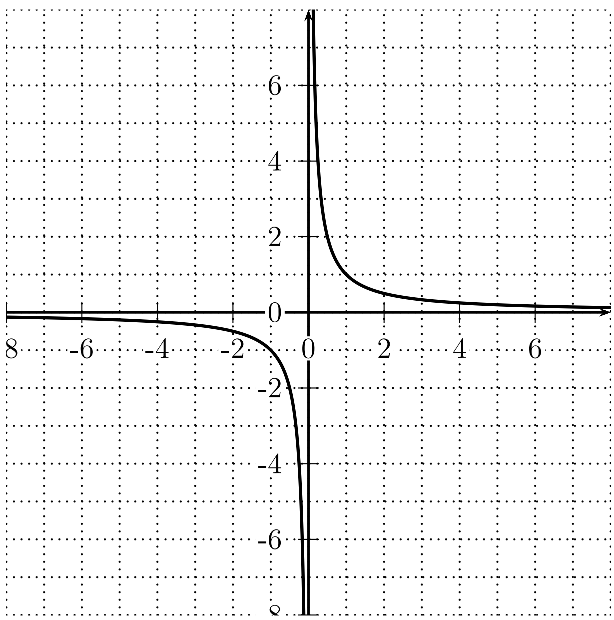
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\dfrac{1}{x}$		$\searrow$	$\|$	$\searrow$	

Exercice 6

1. Comparer les inverses de a et b.
   (a) $a = 1,3$ et $b = 1,4$
   (b) $a = -2,7$ et $b = -2,6$
2. Donner le meilleur encadrement de $\dfrac{1}{x}$.
   (a) $5 < x < 10$
   (b) $-9 < x < -7$

Exercice 7
Démontrer le théorème relatif aux variations de la fonction inverse.

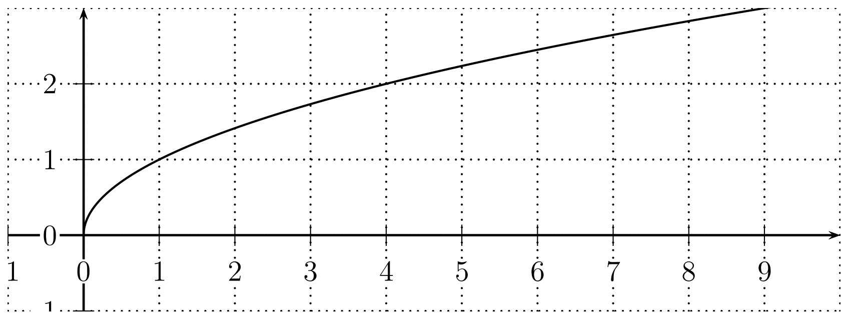
Représentation graphique de la fonction inverse $f(x) = \dfrac{1}{x}$



Remarque
La courbe représentative de la fonction inverse est une **hyperbole**.
La fonction inverse est **impaire**. L'origine du repère est centre de symétrie de la courbe.

IV La fonction racine carrée

Définition
La fonction racine carrée est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

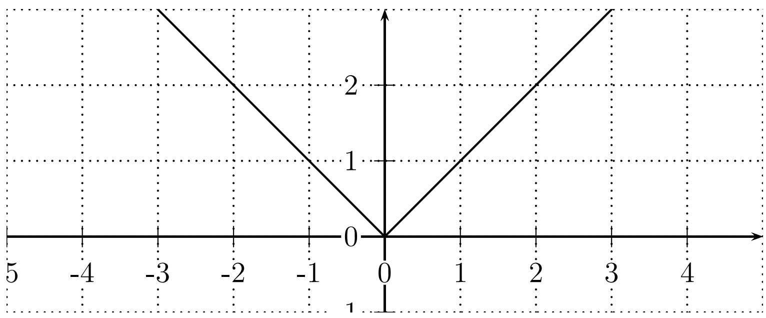


Propriété
La fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

V La fonction valeur absolue

Définition
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la valeur absolue de x est le réel positif noté $|x|$ défini par :
- si $x \geqslant 0$, alors $|x| = x$
- si $x < 0$ alors $|x| = -x$.

Représentation graphique de la fonction valeur absolue



Propriété ("distance" entre deux réels)
Pour tous réels a et b, la distance entre a et b (longueur AB où A et B sont les images des réels a et b sur la droite graduée) est $|a - b|$.

Remarque
1. Soient $a \in \mathbb{R}$, et $r > 0$.
   L'ensemble des nombres réels x tels que $|x - a| \leqslant r$ est l'intervalle $[a - r; a + r]$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2} = |x|$.