

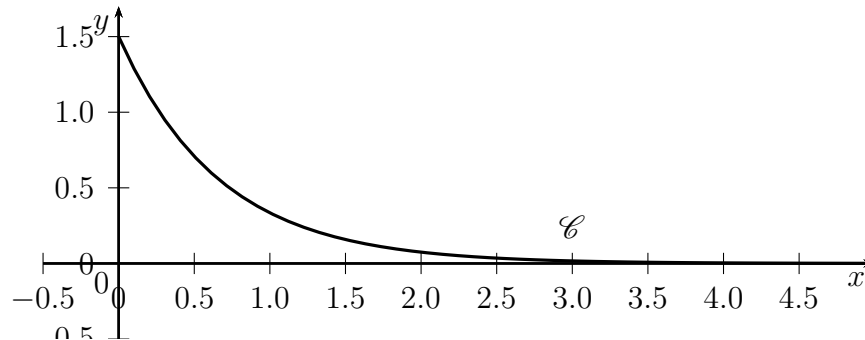
Exercices

Loi exponentielle – Loi de Poisson

I Loi exponentielle

Exercice 1

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ . La courbe $\mathcal{C}$ ci-dessous représente la fonction de densité f associée à X .



1. Indiquer où se lit λ sur le graphique
2. Quelle est l'expression de f ?
3. Interpréter graphiquement $P(0,5 < X < 1,5)$.

Exercice 2

X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,05$.

1. Donner l'expression de la fonction de densité.
2. Calculer les probabilités, arrondir à 0,001 près.
 $P(X \in [25; 35])$ $P(X \leq 20)$ $P(X > 40)$ $P(X = 20)$
3. Déterminer l'espérance $E(X)$ et l'écart-type $\sigma(X)$.

Exercice 3

X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,2$.

1. Calculer les probabilités, arrondir à 0,001 près.
 $P(1 \leq X \leq 3)$ $P(X \leq 6)$ $P(X > 4)$ $P(X = 3)$
2. Déterminer l'espérance $E(X)$ et l'écart-type $\sigma(X)$.

Exercice 4

X est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre 0,002. Déterminer le nombre a tel que $P(X \leq a) = 0,3$. Arrondir à 10^{-2} .

Exercice 5

X est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre 0,01. Déterminer le nombre a tel que $P(X \leq a) = 0,4$. Arrondir à 10^{-3} .

Exercice 6

On s'intéresse à la durée de vie d'un certain modèle de lampe fluorescente.

T est la variable aléatoire qui, à toute lampe prélevée au hasard dans le stock important, associe sa durée de bon fonctionnement (en heures).

On suppose que T suit la loi exponentielle de paramètre 0,0005.

1. Donner la fonction de densité de T .
2. Calculer l'espérance de T et interpréter.

3. Calculer les probabilités des événements suivants (arrondir à 10^{-2}) :

- (a) A : "la durée de bon fonctionnement de la lampe prélevée est comprise entre 2 000 h et 2 800 h".
- (b) B : "la durée de bon fonctionnement de la lampe prélevée est inférieure à 3 000 h".
- (c) C : "la durée de bon fonctionnement de la lampe prélevée est supérieure à 2 500 h".
- (d) D : "la durée de bon fonctionnement de la lampe prélevée est égale à 2 000 h".

Exercice 7

On s'intéresse à la durée de vie d'une enceinte connectée. T est la variable aléatoire qui, à toute enceinte prélevée au hasard dans le stock important, associe sa durée de bon fonctionnement (en jours).

On suppose que T suit la loi exponentielle de paramètre 0,001 25.

1. Donner la fonction de densité de T .
2. Calculer les probabilités des événements suivants (arrondir à 10^{-2}) :
 - (a) A : "la durée de bon fonctionnement de l'enceinte est égale à 800 jours".
 - (b) B : "la durée de bon fonctionnement de l'enceinte est inférieure à 800 jours".
 - (c) C : "la durée de bon fonctionnement de l'enceinte est supérieure à trois ans".
 - (d) D : "la durée de bon fonctionnement de l'enceinte est comprise entre un an et trois ans".
3. Calculer l'espérance de T et interpréter.
4. Calculer $\sigma(T)$.

Exercice 8

Dans cet exercice les probabilités seront arrondies à 10^{-2} .

La durée de vie, exprimée en mois, d'un ordinateur portable est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ . On suppose que l'espérance de vie d'un ordinateur est de 5 ans.

1. Déterminer la valeur exacte du paramètre λ .
2. Calculer alors $P(X \geq 48)$. Interpréter.
3. Calculer la probabilité que l'ordinateur ait un problème dès la première année.

Exercice 9

Dans cet exercice les probabilités seront arrondies à 10^{-2} .

La durée de vie, exprimée en jours, d'un téléphone portable est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ . On suppose que l'espérance de vie d'un téléphone est de 3 ans (hors accident).

1. Déterminer la valeur exacte du paramètre λ .
2. Calculer alors $P(365 \leq X \leq 730)$. Interpréter.
3. Calculer la probabilité que le téléphone dure plus de 3 ans.

Exercice 10

Dans cet exercice les probabilités seront arrondies à 10^{-3} .

La durée de vie, exprimée en mois, d'un micro-ondes est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,01$.

1. Calculer l'espérance, puis interpréter.
2. Sachant qu'un micro-ondes a fonctionné correctement durant 5 ans, quelle est la probabilité qu'il fonctionne encore pendant 4 ans de plus ?

Exercice 11

Dans cet exercice les probabilités seront arrondies à 10^{-3} . On s'intéresse à la durée de vie du système de radars de recul d'un véhicule. T est la variable aléatoire qui, à tout système de radars, associe sa durée de bon fonctionnement (en mois).

On suppose que T suit une loi exponentielle de paramètre λ et que $\sigma(T) = 50$.

1. Donner $E(T)$. Interpréter.
2. Déterminer λ .
3. Un système a fonctionné correctement pendant 10 mois. Quelle est la probabilité qu'il fonctionne encore pendant 30 mois de plus ?

Exercice 12 (simulation d'une loi exponentielle à partir d'une loi uniforme au tableur)

1. Soit X une variable suivant la loi uniforme sur $]0; 1]$.
 - (a) Simuler, à l'aide d'un tableur, une série de 10 réalisations de la variable X .
 - (b) Soit a un réel de $]0; 1]$. Calculer $P(X \geq a)$.
2. Soit $\lambda > 0$. On note T la variable définie par $T = -\frac{1}{\lambda} \ln(X)$.
Montrer que pour tout $t > 0$, $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$.
3. Quelle est la loi que suit X ? Justifier.
4. Simuler à l'aide d'un tableur une série de 10 réalisations de la variable T en choisissant $\lambda = 0,005$.

Exercice 13

La variable aléatoire T qui représente la durée de vie, en jours, d'un composant d'une console de jeux suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{700}$.

1. Quelle est la durée de vie moyenne du composant ?
2. Calculer la probabilité que le composant n'ait pas de défaillance durant les 120 premiers jours.
3. Calculer la probabilité que le composant soit toujours en fonctionnement au bout de 2 ans.
4. Calculer la probabilité que le composant fonctionne encore au bout de 5 ans, sachant qu'il fonctionne encore au bout de 2 ans.
5. Au bout de combien de temps aura-t-on 10 % des composants en panne ? Calculer la probabilité que la console fonctionne après 300 jours, les composants A et B étant montés en série.

Exercice 14

La durée de vie, exprimée en années, d'un appareil électroménager avant sa première panne est une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre λ .

Une étude statistique montre qu'environ 22% des appareils tombent en panne avant la fin de la deuxième année.

On pourra arrondir les résultats à 10^{-2} près.

1. Déterminer la valeur de λ .
2. Pour la suite de l'exercice, on prend $\lambda = 0,12$. Quelle est la durée de vie moyenne de ces appareils ?
3. Calculer la probabilité qu'un appareil fonctionne entre 5 et 15 ans.
4. Au bout de quelle durée aura-t-on 10 % des appareils en panne ?
5. Montrer que la probabilité qu'un appareil fonctionne correctement pendant au moins 13 ans est d'environ 0,21 (en arrondissant à 10^{-2}).

6. On considère que la durée de vie d'un appareil est indépendante de celle des autres.
 - (a) Un magasin a acheté 10 de ces appareils. Quelle est la probabilité pour qu'au moins un de ces appareils ait une durée de vie supérieure à 13 ans ?
 - (b) Question bonus (1 point)
Déterminer le nombre minimal d'appareils que le magasin doit acheter pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux fonctionne correctement pendant plus de 13 ans soit supérieure à 0,999.

Exercice 15

Une grande entreprise dispose d'un vaste réseau informatique. On observe le temps de fonctionnement normal séparant deux pannes informatiques. Ce temps sera appelé « temps de fonctionnement ». Soit X la variable aléatoire égale au temps de fonctionnement, exprimé en heures.

On admet que X suit une loi exponentielle de paramètre λ . Le paramètre λ est un réel strictement positif.

On rappelle que, pour tout réel $t \geq 0$,
$$P(X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx.$$

1. On sait que la probabilité que le temps de fonctionnement soit inférieur à 7 heures est égale à 0,6.
Montrer qu'une valeur approchée de λ à 10^{-3} près est 0,131.

Dans les questions suivantes, on prendra 0,131 pour valeur approchée de λ et les résultats seront donnés à 10^{-2} près .

2. Montrer qu'une valeur approchée de la probabilité que le temps de fonctionnement soit supérieur à 5 heures est égale à 0,52.
3. Calculer la probabilité que le temps de fonctionnement soit supérieur à 9 heures sachant qu'il n'y a pas eu de panne au cours des quatre premières heures.
4. Calculer la probabilité que le temps de fonctionnement soit compris entre 6 et 10 heures.
5. Quel est le temps de fonctionnement moyen ? (on pourra arrondir à l'heure près).
6. On relève aléatoirement huit temps de fonctionnement, qu'on suppose indépendants. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de relevés correspondant à des temps de fonctionnement supérieurs ou égaux à 5 heures.
 - (a) Quelle est la loi suivie par Y ?
 - (b) Calculer la probabilité que trois temps parmi ces huit soient supérieurs ou égaux à 5 heures.
 - (c) Calculer l'espérance mathématique de Y (on arrondira à l'entier le plus proche). Interpréter.
7. On relève désormais un certain nombre de temps de fonctionnement. On suppose que les relevés sont indépendants.
 - (a) Écrire un algorithme qui a pour but de déterminer le nombre minimal n_0 de relevés à effectuer pour que la probabilité de ne trouver aucun temps de fonctionnement supérieur ou égal à 5 heures soit inférieure ou égale à 0,001.
L'algorithme pourra être écrit en langage courant ou en langage calculatrice/Python.
 - (b) Programmer cet algorithme à la calculatrice ou Python et donner la valeur de n_0 .
 - (c) Le directeur de l'entreprise affirme :
« On connaît donc le nombre minimal de relevés à effectuer pour obtenir au moins un temps de fonctionnement supérieur ou égal à 5 heures, avec une probabilité supérieure ou égale à 0,999 ».
A-t-il raison ? Argumenter la réponse.

II Loi de Poisson

Exercice 16

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre 2.

1. Déterminer l'espérance de X .
2. Calculer les probabilités suivantes (arrondir à 10^{-3}) :

$$P(X = 1) \qquad P(X \leq 1) \qquad P(X > 1)$$

Exercice 17

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre 1,8.

1. Déterminer l'espérance de X .
2. Calculer les probabilités suivantes (arrondir à 10^{-3}) :

$$P(X = 2) \qquad P(X \leq 3) \qquad P(X > 2)$$

Exercice 18

Dans une entreprise de vente par correspondance, une étude statistique a démontré qu'il y avait 5 % de bons de commande comportant au moins une erreur. On constitue au hasard un échantillon de 100 bons de commande parmi ceux traités un jour donné. Le nombre de bons de commande traités dans cette journée est assez important pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 100 bons de commande. On désigne par X la variable aléatoire qui associe à tout échantillon de 100 bons le nombre de bons erronés. On admet que X suit la loi de Poisson de paramètre 5.

1. Justifier le choix du paramètre.
2. Déterminer à l'aide de la calculatrice, la probabilité de chacun des événements suivants :
 - (a) A : "il y a exactement 5 bons erronés parmi les 100".
 - (b) B : "il y a au plus 5 bons erronés parmi les 100".
 - (c) C : "il y a au moins 5 bons erronés parmi les 100".

Exercice 19

Dans cet exercice les probabilités seront arrondies à 10^{-3} .

Suite à une étude statistique, un fournisseur d'accès à Internet (FAI) constate qu'il reçoit en moyenne entre 11h et 12h, 3 appels téléphoniques par minute. On suppose que le nombre d'appels reçus pendant une minute X est une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson.

1. Donner le paramètre de cette loi de Poisson.
2. Calculer la probabilité pour qu'entre 11h30 et 11h31 :
 - (a) il n'y ait aucun appel ;
 - (b) il y ait exactement un appel ;
 - (c) il y ait plus de deux appels ;
 - (d) il y ait moins de trois appels.

Exercice 20

Une variable aléatoire X suit la loi de Poisson de paramètre λ . Déterminer λ sachant que $P(X = 0) = 0,3$.

Rappel : $P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$.

Exercice 21

Dans une ville, on a répertorié le nombre d'accidents pendant une journée sur une période de 100 jours. Ces accidents sont survenus indépendamment les uns des autres. Les résultats sont donnés dans le tableau suivant :

Nombre d'accidents	0	1	2	3	4	5
Nombre de jours	40	33	18	6	2	1

1. Calculer le nombre moyen λ d'accidents par jour durant la période de 100 jours.
2. On suppose que le nombre d'accidents X d'une journée choisie au hasard suit une loi de Poisson de paramètre λ . Calculer la probabilité pour qu'il n'arrive aucun accident, un, deux, trois, quatre accidents.
3. Théoriquement, combien y aura-t-il de jours sans aucun accident pendant une période de 365 jours ?

Exercice 22

Une machine fabrique plusieurs milliers de bouchons cylindriques par jour. On admet que la probabilité qu'un bouchon, prélevé au hasard dans la production d'une journée, soit défectueux est 0,05.

On prélève au hasard un échantillon de 80 bouchons. Ce prélèvement est assimilé à un tirage de 80 bouchons avec remise. On nomme X la variable aléatoire qui, à chaque tirage de 80 bouchons, associe le nombre de bouchons défectueux dans cet échantillon.

1. Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire X ?
2. Déterminer l'espérance mathématique de X .
3. On approche la loi de la variable aléatoire X par une loi de Poisson. Donner le paramètre λ de cette loi de Poisson.
4. On note Y la variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ . Calculer avec Y la probabilité qu'un tel prélèvement contienne exactement 10 bouchons défectueux.

Exercice 23

Une entreprise fabrique, en grande quantité, des rondelles pour l'industrie. Une rondelle de ce modèle est conforme pour les diamètres lorsque le diamètre intérieur appartient à l'intervalle $[7,9;8,1]$ et le diamètre extérieur appartient à l'intervalle $[17,2;18,2]$.

Dans un lot de ce type de rondelles, 3 % des rondelles ne sont pas conformes pour les diamètres. On prélève au hasard 50 rondelles de ce lot pour vérification des diamètres. Le lot est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 50 rondelles.

On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 50 rondelles, associe le nombre de rondelles non conformes pour les diamètres.

1. Quelle loi suit la variable aléatoire X ? Donner le ou les paramètres de cette loi.
2. Calculer la probabilité que dans un tel prélèvement deux rondelles ne soient pas conformes pour les diamètres. Arrondir à 10^{-3} .
3. On considère que la loi suivie par X peut être approchée par une loi de Poisson. Déterminer le paramètre λ de cette loi de Poisson.
4. On désigne par Y une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ .
 - (a) Calculer à 10^{-3} près $P(Y = 2)$. Interpréter.
 - (b) Calculer à 10^{-3} près $P(Y > 2)$. Interpréter.

Exercice 24

Une entreprise pharmaceutique fabrique, en très grande quantité, des comprimés. On considère que 0, 5% des comprimés n'ont pas la masse souhaitée. On prélève au hasard 300 comprimés de la production. La production est suffisamment importante pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise. On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 300 comprimés, associe le nombre de comprimés non conformes.

1. Quelle loi suit la variable aléatoire X ? Donner le ou les paramètres de cette loi.

2. Calculer la probabilité que dans un tel prélèvement plus de trois comprimés ne soient pas conformes. Arrondir à 10^{-4} .
3. On considère que la loi suivie par X peut être approchée par une loi de Poisson. Déterminer le paramètre λ de cette loi de Poisson.
4. On désigne par Y une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ . En utilisant la variable aléatoire Y , calculer à 10^{-4} la probabilité qu'au moins 5 comprimés ne soient pas conformes.

Exercice 25 (simulation d'une loi de Poisson en Python)

On s'intéresse à la modélisation du trafic Internet au terminal informatique d'une grande société. On admet que la variable aléatoire X correspondant au temps, en secondes, séparant l'arrivée de deux paquets de données à ce terminal suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 700$ et que les arrivées des paquets de données sont indépendantes les unes des autres.

On considère la variable aléatoire X qui, à toute durée de 0.01 seconde, fait correspondre le nombre de paquets de données arrivant à ce terminal.

On admet que la loi exponentielle de paramètre 700 est simulée par : $-\log(\text{random()})/700$.

On considère l'algorithme suivant :

```
from numpy import *
from random import *
def trafic():
    x=-1
    s=0
    while s<=0.01:
        s=s-log(random())/700
        x=x+1
    return(x)
print(trafic())
```

Que représentent les variables aléatoires s et x ? Expliquer le fonctionnement de cet algorithme.