Chapitre 5 : Nombres complexes (1^{re} partie).

I Forme algébrique d'un nombre complexe

Définition (et théorème)
Il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$, appelé ensemble des nombres complexes, qui possède les propriétés suivantes :

1. $\mathbb{C}$ contient un nombre noté i tel que $\mathrm{i}^2 = -1$.
2. L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels est inclus dans $\mathbb{C}$.
3. Tout nombre complexe z s'écrit de façon unique $z = a + \mathrm{i}b$, avec a et b réels.
4. L'addition et la multiplication des nombres réels se prolongent aux nombres complexes et les règles de calcul restent les mêmes.

Définition
L'écriture $z = a + \mathrm{i}b$ avec a et b réels s'appelle la forme algébrique du nombre complexe z.
a est la partie réelle de z, elle est notée $\mathrm{Re}(z)$.
b est la partie imaginaire de z, elle est notée $\mathrm{Im}(z)$.

Exemple :
Soit $z = 5 - 7\mathrm{i}$.
La partie réelle de z est $a = 5$.
La partie imagiaire de z est $b = -7$.

Remarque

1. Lorsque $b = 0$, z est un nombre réel.
2. Lorsque $a = 0$, ont dit que z est imaginaire pur.

Exemple :
Soit $z = 3 - 8\mathrm{i}$. Alors $\mathrm{Re}(z) = 3$, et $\mathrm{Im}(z) = -8$.
Le nombre $3\mathrm{i}$ est imaginaire pur ($a = 0$ et $b = 3$).

Exercice 1
Identifier la partie réelle a et la partie imaginaire b des nombres complexes suivants.

1. $z = 1 - 6\mathrm{i}$.
2. $z = 2 + \mathrm{i}$.
3. $z = -4$.
4. $z = -7\mathrm{i}$.
5. $z = \dfrac{5 - 7\mathrm{i}}{3}$.

Exercice 2
Montrer que pour tous réels a et b, $(a + \mathrm{i}b)(a - \mathrm{i}b) = a^2 + b^2$.

Propriété (opérations dans $\mathbb{C}$)
Soient $z = a + \mathrm{i}b$ et $z' = a' + \mathrm{i}b'$ deux nombres complexes sous leur forme algébrique (a, b, a', b' réels).

1. Somme :
$$z + z' = (a + \mathrm{i}b) + (a' + \mathrm{i}b') = (a + a') + \mathrm{i}(b + b')$$
2. Produit :
$$zz' = (a + \mathrm{i}b)(a' + \mathrm{i}b') = aa' - bb' + \mathrm{i}(ab' + ba')$$
3. Inverse : si $z \neq 0$,
$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + \mathrm{i}b} = \frac{a - \mathrm{i}b}{a^2 + b^2}$$
4. Quotient : si $z' \neq 0$,
$$\frac{z}{z'} = \frac{a + \mathrm{i}b}{a' + \mathrm{i}b'} = (a + \mathrm{i}b) \times \frac{1}{a' + \mathrm{i}b'}$$

Remarque
Pour l'écriture algébrique d'un nombre complexe, on ne laisse pas de i au dénominateur.
Si le dénominateur est $(a + \mathrm{i}b)$, on multiplie au numérateur et au dénominateur par son conjugué $(a - \mathrm{i}b)$.
Le dénominateur devient réel : $(a + \mathrm{i}b)(a - \mathrm{i}b) = a^2 + b^2$.

Exercice 3
Mettre sous forme algébrique $\dfrac{1}{1 - 3\mathrm{i}}$ et $\dfrac{1 + 2\mathrm{i}}{1 + \mathrm{i}}$

Remarque
On a $\mathrm{i}^2 = -1$, $\mathrm{i}^3 = -\mathrm{i}$, et $\mathrm{i}^4 = 1$.
En particulier, $\dfrac{1}{\mathrm{i}} = -\mathrm{i}$.

Propriété (égalité de deux nombres complexes)
Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si, ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire.
Autrement dit, si $z = a + \mathrm{i}b$ et $z' = a' + \mathrm{i}b'$ avec a, b, a', b' réels, alors
$$z = z' \Leftrightarrow (a = a' \text{ et } b = b')$$

Conséquence
Soit $z = a + \mathrm{i}b$ avec a et b réels. Alors,
$$z = 0 \text{ si et seulement si } (a = 0 \text{ et } b = 0).$$

Exercice 4
Résoudre les équations suivantes. Donner la solution sous forme algébrique.

1. $(2 + \mathrm{i})z = 5$
2. $4 - 2\mathrm{i}z = -3 + \mathrm{i}$
3. $(1 + 3\mathrm{i})z = 3 - 2\mathrm{i}$

II Conjugué d'un nombre complexe

Définition
Soit $z = a + ib$, avec a, b réels.
Le conjugué de z est le nombre complexe $\overline{z} = a - ib$.

Exemple :
$\overline{3 + 5i} = 3 - 5i$.

Remarque
Pour tout nombre complexe z, $\overline{\overline{z}} = z$.

Propriété (opérations sur les conjugués)
Soient z et z' deux nombres complexes.

1. $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$.
2. $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$.
3. Si $z' \neq 0$, $\overline{\left(\dfrac{1}{z'}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z'}}$ et $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$.
4. $z\overline{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$.

Démonstration

1. $\overline{(a + ib) + (a' + ib')} = \overline{(a + a') + i(b + b)} = a + a' - i(b + b') = (a - ib) + (a' - ib') = \overline{z} + \overline{z'}$.
2. On procède de même en passant aux formes algébriques.
3. On procède comme pour 1.
4. Déjà vu en exercice, il suffit de développer.

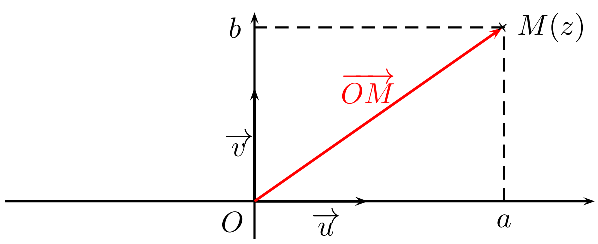
□

Remarque (Méthode à connaître)
Pour mettre sous forme algébrique un quotient de deux nombres complexes, on multiplie au numérateur et au dénominateur par le conjugué du dénominateur.

III Représentation géométrique d'un nombre complexe

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$. Il est ainsi appelé plan complexe.

Définition
Soient a et b deux nombres réels.
À tout nombre complexe $z = a + ib$ on associe un unique point du plan, le point $M(a; b)$.
Réciproquement, à tout point point $M(a; b)$, on associe le nombre complexe $z = a + ib$.
On dit que M est l'image du nombre complexe z, et que z est l'affixe du point M.
z est aussi l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OM}$.



Propriété

1. $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$.
2. $z_{\overrightarrow{w}+\overrightarrow{w'}} = z_{\overrightarrow{w}} + z_{\overrightarrow{w'}}$.
3. Pour tout $k \in \mathbb{R}$, $z_{k\overrightarrow{w}} = kz_{\overrightarrow{w}}$.
4. Si I est le milieu de $[AB]$, $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$.

1. $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A; y_B - y_A)$.
   Donc $z_{\overrightarrow{AB}} = x_B - x_A + \mathrm{i}(y_B - y_A) = x_B + \mathrm{i}y_B - (x_A + \mathrm{i}y_A) = z_B - z_A$.
2. On raisonne de même en passant aux coordonnées pour montrer les points 2., 3. et 4..

Propriété

Deux vecteurs sont égaux si et seulement si leurs affixes sont égales.

Propriété (rappels de seconde)

Soient A, B, C et D quatre points du plan.

1. Le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
2. Les points A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
3. On suppose de plus que $A \neq B$ et $C \neq D$.
   Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Exercice 5

On donne $z_A = 4 + 4\mathrm{i}$, $z_B = 1 + 3\mathrm{i}$, $z_C = 1$, et $z_D = 4 + \mathrm{i}$.
Montrer que $ABCD$ est un parallélogramme.

Exercice 6

On donne $z_A = 2 + 4\mathrm{i}$, $z_B = -2 + 2\mathrm{i}$, $z_C = 4 - 2\mathrm{i}$, et $z_D = 8$.
Montrer que $ABCD$ est un parallélogramme.

Exercice 7

On donne $z_E = -2 + 4\mathrm{i}$, $z_F = 2\mathrm{i}$, $z_G = 5 - 3\mathrm{i}$.
Montrer que les points E, F G sont alignés.

Exercice 8

On donne $z_A = -2 + \mathrm{i}$, $z_B = 1 + 2\mathrm{i}$, $z_C = 5$, et $z_D = -1 - 2\mathrm{i}$.
Montrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Exercice 9

On donne $z_A = 3 + 4\mathrm{i}$, $z_B = -1 + 5\mathrm{i}$, $z_C = 2 - \mathrm{i}$.

1. Déterminer les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.
2. Déterminer les coordonnées du point E tel que $ABEC$ soit un parallélogramme.
3. Placer les points A, B, C, D et E et tracer les deux parallélogrammes.