2de. Correction du devoir maison n° 2

Exercice 1 (n° 110 page 106)

Étudier si les propositions suivantes sont vraies ou fausses.
Pour tous nombres a, b, c et d,

1. Si $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$, alors $a - c \leqslant b - d$.
   $\boxed{\text{Faux.}}$
   Donnons un contre-exemple.
   Prenons $a = 2$, $b = 3$, $c = -8$ et $d = 0$.
   Alors, $a - c = 2 - (-8) = 10$, et $b - d = 3 - 0 = 3$.
   Il est clair que $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$, et pourtant $a - c > b - d$.
2. Si $2a - 2 \leqslant 2$, et $11 - 3b \leqslant 2$, alors $a \leqslant b$.
   $\boxed{\text{Vrai.}}$
   On suppose que $2a - 2 \leqslant 2$, et $11 - 3b \leqslant 2$.
   $2a - 2 \leqslant 2$ ssi $2a \leqslant 4$ ssi $a \leqslant 2$.
   $11 - 3b \leqslant 2$ ssi $9 \leqslant 3b$ ssi $b \geqslant 3$.
   Ainsi, $a \leqslant 2 < 3 \leqslant b$.
   On peut donc affirmer que $a \leqslant b$ (et même $a < b$).

Exercice 2 (n° 115 page 107)

Notons x la longueur du côté du carré.
Si l'on augmente la longueur du côté de 4 cm, alors l'aire augmente de 40 cm^2.
Ainsi, $(x + 4)^2 = x^2 + 40$.
D'où $x^2 + 8x + 16 = x^2 + 40$, puis $8x = 24$, et $x = 3$.

$\boxed{\text{Peter dit vrai : il existe un tel carré, son côté mesure 3 cm.}}$

Exercice 3 (n° 34 page 217)

1. $g(x) \geqslant 0,5$.
   $\boxed{\text{Les solutions sont les abscisses des points de } \mathscr{C}_g \text{ qui ont une ordonnée supérieure ou égale à 0,5. } S = [-2,5; -1] \cup [1,5; 4].}$
2. $g(x) < 0$.
   $\boxed{\text{Les solutions sont les abscisses des points de la courbe qui ont une ordonnée strictement négative. } S =]-0,5; 1[.}$
3. $g(x) > 1$
   $\boxed{\text{Les solutions sont les abscisses des points de la courbe qui ont une ordonnée strictement supérieure à 1. } S =]2,5; 4].}$

Exercice 4 (n° 37 page 218)

1. $f(x) \geqslant g(x)$.
   $\boxed{\text{Les solutions sont les abscisses des points où } \mathscr{C}_f \text{ est au-dessus de } \mathscr{C}_g. \quad S = [-3; -2] \cup [1; 3].}$
2. $f(x) > g(x)$.
   $\boxed{\text{Les solutions sont les abscisses des points où } \mathscr{C}_f \text{ est strictement au-dessus de } \mathscr{C}_g \text{ (on exclut les abscisses des points d'intersection).} \quad S =]-3; -2[\cup]1; 3].}$
3. $f(x) \leqslant g(x)$
   $\boxed{\text{Les solutions sont les abscisses des points où } \mathscr{C}_f \text{ est en-dessous de } \mathscr{C}_g. \quad S = [-2; 1].}$

Exercice 5 (facultatif, n° 121 pge 108)

On considère un rectangle de dimensions L et ℓ (avec $L > \ell$).
Son aire est donc $L \times \ell$.
Si l'on diminue d'une unité sa longueur, et qu'on augmente d'un unité sa largeur, les dimensions du nouveau rectangle sont $L - 1$ et $\ell + 1$.
L'aire du nouveau rectangle est $(L - 1) \times (\ell + 1)$.
Ainsi, l'aire augmente si :

$$\begin{array}{rcl} (L-1)(\ell+1) & \geqslant & L \times \ell \\ L \times \ell + L - \ell - 1 & \geqslant & L \times \ell \\ L & \geqslant & \ell + 1 \end{array}$$

Ainsi, l'aire augmente si et et seulement si $L \geqslant \ell + 1$.

$\boxed{\text{L'aire n'augmente donc pas toujours.}}$

Pour donner un contre-exemple, on peut considérer un rectangle de dimensions $L = 2$ et $\ell = 1,5$.
Alors l'aire du rectangle de départ est $L \times \ell = 2 \times 1,5 = 3$.
L'aire du nouveau rectangle est $(L - 1) \times (\ell + 1) = 1 \times 2,5 = 2,5$.

$\boxed{\text{Dans ce cas, l'aire a diminué.}}$