Terminale STI - Correction du devoir n° 2

Exercice 1 (5 points)

Cédric s'est inscrit au marathon de Paris et souhaite organiser sa préparation sur 17 semaines. Dans son programme hebdomadaire, il prévoit une séance unique de course. Lors de la première semaine, il court 14 km. Chaque semaine, il augmente la distance parcourue de 1,6 km par rapport à la semaine précédente.
Pour tout entier n non nul, on note u_n la distance parcourue la $n^{\text{ième}}$ semaine. Ainsi $u_1 = 14$.

1. Calculer u_2 et u_3.
   $u_2 = u_1 + 1,6 = 14 + 1,6 = 15,6$.
   $u_3 = u_2 + 1,6 = 15,6 + 1,6 = 17,2$.
2. Préciser la nature de la suite u_n.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 1,6$.
   La suite est arithmétique de raison $r = 1,6$.
3. Exprimer u_n de fonction de n.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_1 + (n-1) \times r = 14 + (n-1) \times 1,6$.
4. Cédric sera-t-il prêt pour le marathon (42,195 km) au bout des 17 semaines d'entraînement ?
   Le dernier terme est u_{17}.
   $u_{17} = 14 + (17-1) \times 1,6 = 39,6 < 42,195$.
   On peut considérer qu'il ne sera pas prêt car son dernier entraînement fait une distance inférieure à celle du marathon.
5. Quelle distance totale aura-t-il parcourue durant la période de préparation ? Justifier.
   $S = \dfrac{u_1 + u_{17}}{2} \times 17 = \dfrac{14 + 39,6}{2} \times 17 = 455,6$.
   Au total il aura parcouru 455,6 km durant sa préparation.

Exercice 2 (2,5 points)

1. Écrire les nombres sous la forme a^k où $a > 0$ et $k \in \mathbb{R}$.
   $A = 11^{4,5} \times (11^{-3,1})^2 = 11^{4,5+(-3,1\times 2)} = 11^{-1,7}$
   $B = \dfrac{6^{5,1} \times 6}{6^5} = 6^{5,1+1-5} = 6^{1,1}$
   $C = \dfrac{3^{10,6}}{(3^{3,5})^{-3} \times 3^{-1}} = 3^{10,6-3,5\times(-3)-(-1)} = 3^{22,1}$.
2. Écrire sous la forme $a^{k(x)}$ où $a > 0$ et $k(x)$ est une expression de la variable réelle x.
   $D = 25^{x+2} \times 25^{x-7} = 25^{x+2+x-7} = 25^{2x-5}$
   $E = \dfrac{7^{3x-1} \times 7}{7^{x+1}} = 7^{3x-1+1-(x+1)} = 7^{2x-1}$

Exercice 3 (4 points)

1. Déterminer, en justifiant, le sens de variation des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$.
   $f(x) = 0,4 \times 13^x$
   $a = 13 > 1$, donc $x \mapsto 13^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
   En multipliant par $0,4 > 0$, le sens de variation est conservé.
   f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. $g(x) = -3 \times 0,87^x$
   $a = 0,87$ est tel que $0 < 0,87 < 1$, donc $x \mapsto 0,87^x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. En multipliant par $-3 < 0$, le sens de variation est changé. g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. Résoudre les inéquations, et donner l'ensemble solution sous forme d'intervalle.
   $0,38^x < 0,38^{-3}$
   Comme $0 < 0,38 < 1$, la fonction $x \mapsto 0,38^x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
   Donc $x > -3$. $S =]-3; +\infty[$.
   $2,1^{-2x+1} > 2,1^{x-9}$
   $2,1 > 1$, donc la fonction $x \mapsto 2,1^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
   Donc $-2x + 1 > x - 9$, soit $3x < 10$, puis $x < \dfrac{10}{3}$.
   $S = \left]-\infty; \dfrac{10}{3}\right[$.

Exercice 4 (6 points)
En 2012, la plus longue liaison électrique à courant continu en service dans le monde relie la centrale hydro électrique de Xiangjiaba à la ville de Shangai.
Elle mesure environ 1 900 km ; sa puissance électrique initiale est de 6 400 MW.
Lorsque le courant électrique circule dans un câble, une partie de la puissance électrique est perdue.
La puissance électrique dans la ligne Xiangjiaba – Shangai au bout des 1 900 km est de 6 045 MW.

1. (a) Calculer le pourcentage des pertes de puissance électrique sur la ligne Xiangjiaba – Shangai (on donnera un arrondi à 0,01 %).
   $t = \dfrac{v_A - v_D}{v_D} = \dfrac{6045 - 6400}{6400} \approx -0,05546875.$
   La puissance électrique a baissé d'environ 5,55 %.

   (b) Calculer le taux d'évolution moyen de la puissance électrique aux 100 km.
   Sur 1900 km, il y a 19 centaines de km.
   $1 + t_m = (1 + t_g)^{1/n} = (1 + t_g)^{1/19}$.
   Donc $t_m = (1 + t_g)^{1/19} - 1 \approx (1 - 0,05546875)^{1/19} - 1$.
   $t_m \approx -0,003$.
   En moyenne, la puissance électrique diminue de 0,3% tous les 100 km.

2. Dans cette question, la puissance électrique (en watt) restant dans une certaine ligne électrique à courant continu au bout de x centaines de kilomètres est donnée par la fonction P définie sur $[0; +\infty[$ par : $P(x) = 6400 \times 0,997^x$.

   (a) Montrer que la fonction P est décroissante sur $[0; +\infty[$.
   Comme $0 < 0,997 < 1$, la fonction $x \mapsto 0,997^x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
   En multipliant par $6400 > 0$, le sens de variation est conservé.
   Donc P est décroissante sur $[0; +\infty[$.

   (b) Déterminer, à 100 km près, la longueur maximale d'une ligne pour laquelle la perte de puissance reste inférieure à 7 %.
   $6400 \times (1 - 0,07) = 5952$.
   Partant de 6400, une perte de 7% représente 595.
   On cherche le plus grand entier n tel que $P(n) > 5952$.
   On rappelle que P est décroissante.
   $P(24) = 6400 \times 0,997^{24} \approx 5954,8$.
   $P(25) = 6400 \times 0,997^{25} \approx 5936,9$.
   L'entier cherché est 24.
   Pour ne pas perdre plus de 7 % de puissance, la ligne ne doit pas dépasser 2400 km.

Exercice 5 (2 points)
Le nombre d'adhérents d'une association a augmenté lors des trois dernières années de 6 %, puis de 1,8 %, et enfin de 11 %. Calculer le taux d'évolution annuel moyen. On arrondira le résultat à 0,1 % près.
Notons t_g le taux global, et t_m le taux moyen.
$1+t_g = (1+t_1)(1+t_2)(1+t_3) = 1,06 \times 1,018 \times 1,11 = 1,1977788$.
Ensuite, $(1 + t_m)^3 = 1 + t_g$, d'où $1 + t_m = (1 + t_g)^{1/3}$
Ainsi, $t_m = (1 + t_g)^{1/3} - 1 = 1,1977788^{1/3} - 1$.
Donc $t_m \approx 0,062$.
En moyenne, le nombre d'adhérents a augmenté d'environ 6,2 % par an sur les 3 ans.