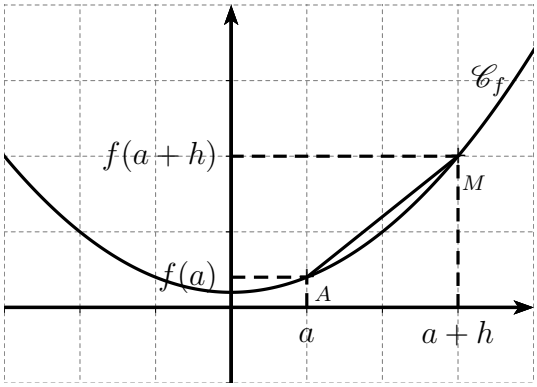
Chapitre 6 : Dérivation
Première partie

I Nombre dérivé

Définition (taux d'accroissement)
Soient f une fonction définie sur un intervalle I, et $a \in I$.
Soit h un réel non nul, tel que $a + h \in I$.
le taux d'accroissement de f entre a et $a + h$ est $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

Remarque
Notons A et M les points de la courbe de f d'abscisses respectives a et $a + h$.
On a donc $A(a; f(a))$ et $M(a + h; f(a + h))$.
Le taux d'accroissement $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ est le coefficient directeur de la droite (AM).
En effet, $\dfrac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{a + h - a} = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.



Exercice 1
Posons $f(x) = x^2$, et $a = 1$. Soit $h \neq 0$.
Exprimer le taux d'accroissement de f entre 1 et $1 + h$.

Remarque
Le taux d'accroissement n'est pas défini lorsque $h = 0$, mais on s'intéresse à ce qu'il devient lorsque h tend vers 0.

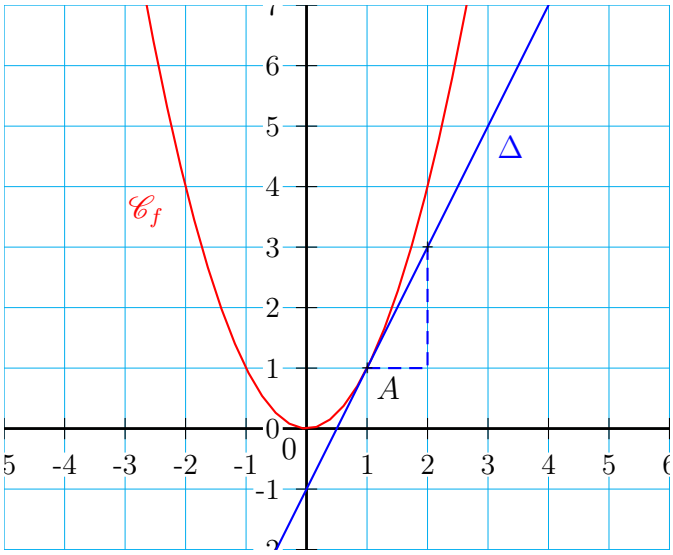
Définition (nombre dérivé)
Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit $a \in I$.
On dit que f est dérivable en a si le taux d'accroissement $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ admet une limite réelle lorsque h tend vers 0.
Ce nombre est alors appelé le nombre dérivé de f en a, noté $f'(a)$.

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Exercice 2
On reprend $f(x) = x^2$, et $a = 1$.
Montrer que f est dérivable en $a = 1$.
Soit $h \neq 0$.
$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{(1+h)^2-1^2}{h} = \frac{1+2h+h^2-1}{h} = \frac{2h+h^2}{h} = 2+h.$$
On a le droit de simplifier par h car $h \neq 0$.
Il vient donc $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = 2$.
Donc f est dérivable en 1, et $f'(1) = 2$.

Définition (tangente)
Soit f une fonction dérivable en le réel a.
La tangente à la courbe de f en a est la droite qui passe par le point de coordonnées $A\,(a; f(a))$ et de coefficient directeur $f'(a)$.

Exemple :
On pose $f(x) = x^2$, et $a = 1$.
On a vu que $f'(1) = 2$.
Donc la tangente au point d'abscisse 1 a pour coefficient directeur 2.



Remarque
Pour tracer la tangente au point d'abscisse a, il suffit de placer le point $A(a; f(a))$ et d'exploiter le coefficient directeur $f'(a)$ pour obtenir un second point.

Exercice 3
Soit f la fonction carré.

1. Montrer que f est dérivable en -2 et que $f'(-2) = -4$.
2. Tracer la tangente T_{-2} à la courbe de f au point d'abscisse -2 sur le graphique précédent.

Propriété (équation de tangente)
Soit f une fonction dérivable en un réel a.
Une équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse a est :
$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

Remarque
Dans l'équation précédente, on vérifie facilement que le point de coordonnées $(a; f(a))$ appartient à la droite, et que son coefficient directeur est $f'(a)$.

Exemple :
On reprend la fonction carré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$, et $a = 1$.
Cherchons une équation de la tangente T_1 à la courbe f au point d'abscisse 1.
C'est la droite qui passe par le point $A(1; f(1))$, c'est-à-dire $A(1; 1)$, et de coefficient directeur $f'(1) = 2$.
On applique la formule précédente :

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1) = 2(x - 1) + 1 = 2x - 2 + 1 = 2x - 1.$$

La tangente à $\mathscr{C}_f$ en 1 est la droite T_1 d'équation $y = 2x - 1$.

Exercice 4
Déterminer une équation de la tangente T_{-2} à la courbe de la fonction carré au point d'abscisse -2.
On rappelle que $f'(-2) = -4$ (voir exercice 3).

On retiendra que $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse a.

Exercice 5
Lire graphiquement un nombre dérivé (la courbe de la fonction et la tangente sont tracées) : ressource 52

II Fonction dérivée

Exercice 6
Montrer que pour tout nombre réel a, la fonction carré $f : x \mapsto x^2$ est dérivable en a.
Calculer $f'(a)$.
Soient $a \in \mathbb{R}$, et $h \neq 0$.
$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} = \frac{2ah + h^2}{h} = 2a + h.$$
On a le droit de simplifier par h car $h \neq 0$.
Il vient donc $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = 2a$.
Pour tout nombre réel a, f est dérivable en a, et $f'(a) = 2a$.

Définition
Soit f un fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout réel de I, c'est-à-dire si pour tout $x \in I$, $f'(x)$ existe. Alors la fonction dérivée de f est la fonction $f' : x \mapsto f'(x)$.

Exemple :
Ainsi, d'après l'exercice 6, la fonction carrée $f : x \mapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $f' : x \mapsto 2x$.
On retrouve ainsi directement $f'(1) = 2$ et $f'(-2) = -4$.

II.1 Dérivée des fonctions usuelles

Théorème (à connaître par ♡)

Fonction f	Dérivée f'	Intervalle de validité
$f(x) = c$ (fonction constante) $f(x) = x$ $f(x) = ax + b$	$f'(x) = 0$ $f'(x) = 1$ $f'(x) = a$	$I = \mathbb{R}$ $I = \mathbb{R}$ $I = \mathbb{R}$
$f(x) = x^2$ $f(x) = x^3$ $f(x) = x^n$, $n \geqslant 1$	$f'(x) = 2x$ $f'(x) = 3x^2$ $f(x) = nx^{n-1}$	$I = \mathbb{R}$ $I = \mathbb{R}$ $I = \mathbb{R}$
$f(x) = x^n$, $n \leqslant -1$ $f(x) = \dfrac{1}{x}$	$f(x) = nx^{n-1}$ $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$	$I =]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$ $I =]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$I =]0; +\infty[$

Exemples :

$f(x) = x^5$, $\quad f'(x) = 5x^4$.

$g(x) = \dfrac{1}{x^3} = x^{-3}$. $\quad g'(x) = -3x^{-4} = -\dfrac{3}{x^4}$.

Démonstration

1. Fonctions constantes. C'est évident puisque le nombre dérivé décrit la pente de la tangente.
2. Fonctions affines. Même argument.
3. $x \mapsto x^n$ On admet la démonstration.
4. $x \mapsto \dfrac{1}{x}$. Soit a un nombre réel non nul, et $h \neq 0$.

   $$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{\dfrac{1}{a+h} - \dfrac{1}{a}}{h} = \frac{\dfrac{a-(a+h)}{a(a+h)}}{h} = \frac{\dfrac{-h}{a(a+h)}}{h} = \frac{-h}{a(a+h)} \times \frac{1}{h} = -\frac{1}{a(a+h)}.$$

   Il apparaît donc que

   $$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} -\frac{1}{a(a+h)} = -\frac{1}{a^2}$$

   Donc f est dérivable sur tout intervalle ne contenant pas 0 et $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.
5. Fonction racine carrée, $f(x) = \sqrt{x}$. Soit $a > 0$ et $h \neq 0$.

   $$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h} = \frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h} \times \frac{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}$$

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{a+h-a}{h(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})} = \frac{h}{h(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})} = \frac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}.$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

Donc f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout $x>0$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. □

II.2 Opérations sur les fonctions dérivables

Théorème
Soient u et v des fonctions dérivables sur un intervalle I, soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

1. Somme de fonctions.
   La fonction $(u+v)$ est dérivable sur I et $(u+v)' = u'+v'$.
2. Produit par un nombre réel.
   Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. La fonction (λu) est dérivable sur I et $(\lambda u)' = \lambda u'$.
3. Produit de fonctions.
   La fonction $(u \times v)$ est dérivable sur I et $(u\times v)' = u'v + uv'$.
4. Inverse et quotient.
   Si v ne s'annule pas sur I (c'est-à-dire $\forall x \in I$, $v(x) \neq 0$), alors
   — la fonction $\frac{1}{v}$ est dérivable sur I et
   $$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}.$$
   — la fonction $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et
   $$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Exercice 7
Dériver les fonctions suivantes :

1. $f(x) = 3x - 5x^4$
2. $g(x) = x + \frac{1}{x}$
3. $i(x) = x\sqrt{x}$
4. $j(x) = \frac{1}{3x^2}$
5. $k(x) = \frac{3-x}{x}$

Remarque
Toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8
Justifier que la fonction $f(x) = \frac{x^2-6x+1}{x-3}$ est dérivable sur son domaine de définition.
Le résultat peut se généraliser.

Remarque
Toute fonction fraction rationnelle (quotient de deux polynômes) est dérivable sur son ensemble de définition.

Démonstration

1. $(u+v)' = u' + v'$:
   $\dfrac{(u+v)(a+h)-(u+v)(a)}{h} = \dfrac{u(a+h)-u(a)}{h} + \dfrac{v(a+h)-v(a)}{h}$.
   Donc $(u+v)'(a) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(u+v)(a+h)-(u+v)(a)}{h} = u'(a)+v'(a)$.
2. $(\lambda u)' = \lambda u'$:
   $\dfrac{(\lambda u)(a+h)-(\lambda u)(a)}{h} = \dfrac{\lambda u(a+h)-\lambda u(a)}{h} = \lambda\dfrac{u(a+h)-u(a)}{h}$.
   Donc $(\lambda u)'(a) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(\lambda u)(a+h)-(\lambda u)(a)}{h} = \lambda u'(a)$.
3. $(u\times v)' = u'v + uv'$
   $\dfrac{(uv)(a+h)-(uv)(a)}{h} = \dfrac{u(a+h)v(a+h)-u(a)v(a)}{h}$
   $= \dfrac{u(a+h)-u(a)}{h}v(a+h) + u(a)\dfrac{v(a+h)-v(a)}{h}$.
   On admet le résultats suivant, vu en terminale : toute fonction dérivable en a est continue en a.
   On a alors $\lim\limits_{h\to 0} v(a+h) = v(a)$.
   Ainsi,
   $$\lim_{h\to 0} \frac{(uv)(a+h)-(uv)(a)}{h} = u'(a)v(a)+u(a)v'(a)$$
   D'où la formule $(uv)' = u'v + uv'$.
4. $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$.
   $\dfrac{\frac{1}{v(a+h)}-\frac{1}{v(a)}}{h} = -\dfrac{v(a+h)-v(a)}{h}\times\dfrac{1}{v(a+h)v(a)}$.
   En passant à la limite lorsque h tend vers 0,
   $\left(\dfrac{1}{v}\right)'(a) = -v'(a)\times\dfrac{1}{[v(a)]^2} = -\dfrac{v'}{v^2}(a)$.
5. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$
   idée : $\dfrac{u}{v} = u\times\dfrac{1}{v}$ et utiliser la formule qui permet de dériver un produit. □

Exercice 9

Calculs de dérivées :

1. dérivée d'un monôme : ressource 30
2. dérivée de $u+v$: ressource 1586
3. dérivée d'un polynôme : ressource 31
4. dérivée de $\dfrac{1}{v}$: ressource 32
5. Dérivée de $\dfrac{u}{v}$: ressource 1963
6. Dérivée de $\dfrac{u}{v}$ (plus difficile) : ressource 1966