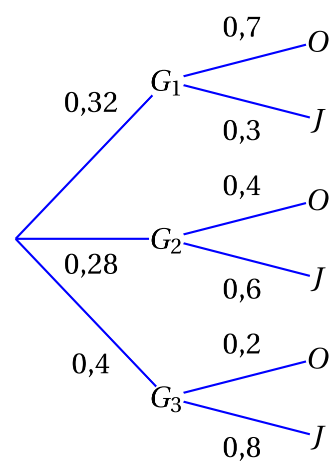
Term S. Mathématique non spécialiste.
Correction du bac blanc

Exercice 1 (5 points)
Une fleuriste vend des plantes qui proviennent de trois grossistes : 32 % des plantes proviennent du grossiste G_1, 28 % du grossiste G_2 et le reste du grossiste G_3. Chaque grossiste livre deux catégories de plantes : des orchidées et des jacinthes.
La livraison du grossiste G_1 comporte 70 % d'orchidées alors que celle du grossiste G_2 n'en comporte que 40 % et celle du grossiste G_3 seulement 20 %.

1. La fleuriste choisit une plante au hasard dans son stock.

   On envisage les événements suivants :
   — G_1 : « La plante choisie a été achetée chez le grossiste G_1 »,
   — G_2 : « La plante choisie a été achetée chez le grossiste G_2 »,
   — G_3 : « La plante choisie a été achetée chez le grossiste G_3 »,
   — O : « La plante choisie est une orchidée »,
   — J : « La plante choisie est une jacinthe ».

   (a) Construire un arbre pondéré traduisant la situation.

   (b) Calculer la probabilité que la plante choisie soit une orchidées achetée chez le grossiste G_3.
   $P(G_3 \cap O) = P(G_3) \times P_{G_3}(O) = 0,4 \times 0,2 = 0,08$.

   (c) Justifier que la probabilité de l'évènement O est égale à $0,416$.
   G_1, G_2 et G_3 forment une partition de Ω. D'après la formule des probabilités totales,
   $P(O) = P(G_1 \cap O) + P(G_2 \cap O) + P(G_3 \cap O) = 0,32 \times 0,7 + 0,28 \times 0,4 + 0,08 = 0,416$.

   (d) La plante choisie est une orchidée.
   Quelle est la probabilité qu'elle ait été achetée chez le grossiste G_1 ? On arrondira à 10^{-3}.
   $P_O(G_1) = \dfrac{P(G_1 \cap O)}{P(O)} = \dfrac{0,32 \times 0,7}{0,416} \approx 0,538$.

2. On choisit au hasard un échantillon de 8 plantes dans le stock de cette fleuriste. On suppose que ce stock est suffisamment important pour que ce choix puisse être assimilé à un tirage avec remise de 8 plantes dans le stock.

   On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre d'orchidées de l'échantillon choisi.

(a) Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
On répète 8 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes de paramètre $p = P(O) = 0,416$.
La variable X qui correspond au nombre de succès (la fleur est une orchidée) suit la loi binomiale de paramètres $n = 8$ et $p = 0,416$.

(b) Quelle est la probabilité que l'échantillon prélevé comporte exactement 4 orchidées? On arrondira à 10^{-3}.
$P(X = 4) = \texttt{binomFdp(8,0.416,4)} \approx 0,244$.

(c) Quelle est la probabilité que cet échantillon comporte au moins trois jacinthes? On arrondira à 10^{-3}.
L'échantillon comporte au moins 3 jacinthes ssi le nombre d'orchidées et de 5 au maximum.
$P(X \leqslant 5) = \texttt{binomFRep(8,0.416,5)} \approx 0,940$.

Exercice 2 (6 points)
On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels et on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{x-1} + 1.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}\,; \vec{j}\right)$.
Partie A : étude de fonction

1. Pour tout réel x on a $f(x) = x\mathrm{e}^{x} \times \mathrm{e}^{-1} + 1$, or (croissances comparées) $\lim\limits_{x \to -\infty} x\mathrm{e}^{x} = 0$, donc, par opérations sur les limites $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$.
On en déduit que la droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à $\mathscr{C}$ au voisinage de $-\infty$.
2. On a $f(x) = x\mathrm{e}^{x} \times \mathrm{e}^{-1} + 1$, et, par opérations sur les limites (il n'y a aucune forme indéterminée ici) : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
3. Par opérations usuelles sur les dérivées :

$$f'(x) = 1\mathrm{e}^{x-1} + x \times 1 \times \mathrm{e}^{x-1} = (x+1)\mathrm{e}^{x-1}.$$

4. Pour tout réel x, $\mathrm{e}^{x-1} > 0$, donc $f'(x)$ a le même signe que $x + 1$. Or $x + 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -1$, on en déduit donc le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	1	$\searrow$	$1 - \mathrm{e}^{-2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Partie B : recherche d'une tangente particulière

1. La tangente T_a a pour équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$, c'est-à-dire :

$$y = (a+1)\mathrm{e}^{a-1}(x-a) + a\mathrm{e}^{a-1} + 1.$$

2. Soit $a > 0$, alors :

$$\begin{aligned} O(0\,;\,0) \in T_a &\iff 0 = (a+1)\mathrm{e}^{a-1}(-a) + a\mathrm{e}^{a-1} + 1 \\ &\iff 0 = \mathrm{e}^{a-1}(-a^2 - a + a) + 1 \\ &\iff 1 - a^2\mathrm{e}^{a-1} = 0. \end{aligned}$$

3. — 1 est une solution de l'équation considérée car $1 - 1^2\mathrm{e}^{1-1} = 1 - 1 = 0$.

   — Montrons maintenant que cette équation n'admet qu'une unique solution sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   Posons, pour tout $x > 0$, $g(x) = 1 - x^2\mathrm{e}^{x-1}$. La fonction g est alors dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et, pour tout $x > 0$:

$$g'(x) = -2x\mathrm{e}^{x-1} - x^2\mathrm{e}^{x-1} = -x(2+x)\mathrm{e}^{x-1}.$$

   $x > 0$, donc $x + 2 > 0$ et par ailleurs $\mathrm{e}^{x-1} > 0$, on en déduit que $g'(x) < 0$ et donc que g est strictement décroissante sur $]0\,;\,+\infty[$.
   Par ailleurs $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$.
   On sait que g est strictement décroissante sur $]0\,;\,+\infty[$ et s'annule en 1.
   Donc si $x < 1$, alors $g(x) > g(1)$ soit $g(x) > 0$ et de même si $x > 1$, alors $g(x) < g(1)$ donc $g(x) < 0$.
   Conclusion : sur $]0\,;\,+\infty[$, $g(x) = 0 \iff x = 1$.

4. La tangente cherchée est T_1, elle a pour équation $y = 2(x-1) + 2$, c'est-à-dire $y = 2x$.

Exercice 3 (4 points)

Cet exercice est un Vrai/Faux.
Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.
Pour les questions 1 et 2, l'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$.

1. On appelle (d) la droite passant par $A(1;6;0)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\\5\end{pmatrix}$.

   Affirmation 1 :

   Une représentation paramétrique de la droite (d) est $\left\{\begin{array}{l} x = -1 - 2t \\ y = 7 + t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 5 + 5t \end{array}\right.$.

   La droite de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l} x = -1 - 2t \\ y = 7 + t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 5 + 5t \end{array}\right.$ est dirigée par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\\5\end{pmatrix}$ et elle passe par A (A est le point de paramètre $t = -1$). C'est donc la droite (d).
   VRAI

2. **Affirmation 2 :**
Les droites (d_1) et (d_2) de représentations paramétriques respectives
$\left\{\begin{array}{l} x = 1+4k \\ y = -1+k \\ z = 2-k \end{array}\right. \quad k \in \mathbb{R}$ et $\left\{\begin{array}{l} x = 2t \\ y = 3+t \\ z = -2+3t \end{array}\right. \quad t \in \mathbb{R}$ ne sont pas coplanaires.
(d_1) est dirigée par $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et (d_2) et dirigée par $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.
Les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ ne sont pas colinéaires (car $4 \times 1 \neq 1 \times 2$).
Donc (d_1) et (d_2) ne sont pas parallèles.
On étudie leur intersection. Elles se coupent ssi il existe des réels k et t tels que
$\left\{\begin{array}{l} 2t = 1+4k \\ 3+t = -1+k \\ -2+3t = 2-k \end{array}\right.$, soit $\left\{\begin{array}{l} k = t+4 \\ 2t = 1+4(t+4) \\ -2+3t = 2-(t+4) \end{array}\right.$, et $\left\{\begin{array}{l} k = t+4 \\ t = -8,5 \\ t = 0 \end{array}\right.$ Impossible. Ce système n'a pas de solution, (d_1) et (d_2) n'ont aucun point commun.
Comme (d_1) et (d_2) ne sont pas parallèles et ne se coupent pas, elles sont non coplanaires.
VRAI

3. **Affirmation 3 :**
L'équation $z + 3\bar{z} = (1+\mathrm{i})^2$ d'inconnue z a pour solution $4 - \mathrm{i}$.
$(4-\mathrm{i}) + 3(4+\mathrm{i}) = 4 - \mathrm{i} + 12 + 3\mathrm{i} = 16 + 2\mathrm{i}$.
Par ailleurs, $(1+\mathrm{i})^2 = 1 + 2\mathrm{i} - 1 = 2\mathrm{i}$.
FAUX

4. **Affirmation 4 :**
Un argument du nombre complexe $(-3+3\mathrm{i})^5$ est $\dfrac{5\pi}{4}$.
$-3 + 3\mathrm{i} = 3\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$.
Donc un argument de $(-3+3\mathrm{i})^5$ est $5 \times \dfrac{3\pi}{4} = \dfrac{15\pi}{4} = -\dfrac{\pi}{4} \quad [2\pi]$.
FAUX

Exercice 4 (5 points)
Un biologiste souhaite étudier l'évolution de la population d'une espèce animale dans une réserve.

Partie A : un premier modèle

Dans une première approche, le biologiste estime que la population croît de 5 % par an.

1. Augmenter de 5 %, c'est multiplier par $1+\dfrac{5}{100}=1,05$; la suite (v_n) est donc géométrique de premier terme $v_0=12$ et de raison $q=1,05$.
   Donc, pour tout n, on a : $v_n=v_0\times q^n=12\times 1,05^n$.
2. Il faut regarder si ce modèle permet de limiter la population à 60 000 individus, autrement dit chercher n tel que $v_n>60$;
   Comme $q>1$ et $v_0>0$, la suite (v_n) diverge vers $+\infty$. Le seuil 60 sera donc dépassé.
   À l'aide de la calculatrice, on observe que $v_{33}=12\times 1,05^{33}\approx 60,04>60$.
   Selon ce modèle, pour $n=33$ c'est-à-dire en 2049, la population dépassera 60 000 individus.
   Ce modèle ne répond donc pas aux contraintes du milieu naturel.

Partie B : un second modèle

Le biologiste modélise ensuite l'évolution annuelle de la population par une suite (u_n) définie par
$u_0=12$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=-\dfrac{1,1}{605}u_n^2+1,1u_n$.

1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=-\dfrac{1,1}{605}x^2+1,1x$.
   (a) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x)=-\dfrac{1,1}{605}\times 2x+1,1=-\dfrac{2,2}{605}x+1,1$.
   $g'(x)>0 \iff -\dfrac{2,2}{605}x+1,1>0 \iff 1,1>\dfrac{2,2}{605}x \iff \dfrac{1,1\times 605}{2,2}>x \iff x<302,5$
   Donc $g'(x)>0$ sur $[0\,;\,60]$ donc g est croissante sur $[0\,;\,60]$.
   (b) On résout dans $\mathbb{R}$ l'équation $g(x)=x$:
   $$g(x)=x \iff -\frac{1,1}{605}x^2+1,1x=x \iff -\frac{1,1}{605}x^2+0,1x=0 \iff x\left(-\frac{1,1}{605}x+0,1\right)=0$$
   $$\iff x=0 \text{ ou } -\frac{1,1}{605}x+0,1=0 \iff x=0 \text{ ou } 0,1=\frac{1,1}{605}x$$
   $$\iff x=0 \text{ ou } 0,1\times\frac{605}{1,1}=x \iff x=0 \text{ ou } x=55$$
2. On remarquera que $u_{n+1}=g(u_n)$.
   (a) $u_1=g(u_0)=g(12)\approx 12,938$
   Avec ce modèle, on peut estimer la population à 12 938 individus en 2017.
   (b) Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété $0\leqslant u_n\leqslant 55$.
   - **Initialisation**
     Pour $n=0$, $u_0=12$ et $0\leqslant 12\leqslant 55$ donc la propriété est vraie au rang 0.

- **Hérédité**

  On suppose que le propriété est vraie au rang $n \geqslant 0$, c'est-à-dire que $0 \leqslant u_n \leqslant 55$; c'est l'hypothèse de récurrence.

  Or $0 \in [0~;~60]$ et $55 \in [0~;~60]$; de plus on sait que le fonction g est croissante sur $[0~;~60]$ donc de $0 \leqslant u_n \leqslant 55$, on peut déduire que $g(0) \leqslant g(u_n) \leqslant g(55)$.

  Les nombres 0 et 55 sont solutions de l'équation $g(x) = x$ donc $g(0) = 0$ et $g(55) = 55$; de plus, $g(u_n) = u_{n+1}$.

  Donc $g(0) \leqslant g(u_n) \leqslant g(55)$ équivaut à $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 55$ et on a donc démontré que la propriété était vraie au rang $n+1$.

- **Conclusion**

  La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire pour tout $n \geqslant 0$; d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

On a donx démontré par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant 55$.

(c) Pour tout n, $u_{n+1} - u_n = -\dfrac{1,1}{605}u_n^2 + 1,1u_n - u_n = -\dfrac{1,1}{605}u_n^2 + 0,1u_n = u_n\left(-\dfrac{1,1}{605}u_n + 0,1\right)$

$$= u_n \times \dfrac{1,1}{605}\left(-u_n + 0,1 \times \dfrac{605}{1,1}\right) = \dfrac{1,1}{605}u_n(55 - u_n)$$

On sait que $0 \leqslant u_n \leqslant 55$ donc $55 - u_n \geqslant 0$ donc $\dfrac{1,1}{605}u_n(55 - u_n) \geqslant 0$.

On a donc démontré que $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ pour tout n donc la suite (u_n) est croissante.

On pouvait aussi faire un raisonnement par récurrence et utiliser le fait que g est croissante sur $[0;60]$ pour l'hérédité.

(d) La suite (u_n) est croissante et majorée par 55 donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite (u_n) est convergente, vers $\ell \leqslant 55$.

(e) On admet que la limite ℓ de la suite (u_n) vérifie $g(\ell) = \ell$ donc elle est solution de l'équation $g(x) = x$.

L'équation $g(x) = x$ n'admet que 2 solutions : 0 et 55.

La suite (u_n) est croissante et $u_0 = 12$ donc la limite ℓ de la suite est supérieure ou égale à 12.

On en déduit donc que $\ell = 55$ ce qui signifie que, selon ce modèle, la population va tendre vers 55 000 individus.

3. Le biologiste souhaite déterminer le nombre d'années au bout duquel la population dépassera les 50 000 individus avec ce second modèle.

   On complète l'algorithme afin qu'il affiche en sortie le plus petit entier r tel que $u_r \geqslant 50$:

Variables	n un entier naturel
	u un nombre réel

Traitement	n prend la valeur 0
	u prend la valeur 12
	Tant Que $u < 50$
	    u prend la valeur $1,1u - \frac{1,1}{605}u^2$
	    n prend la valeur $n+1$
	Fin Tant Que

Sortie	Afficher n