Correction du devoir maison n° 3 : sujet E p 36

1. $u_1 = \frac{1}{3}u_0 + 0 - 2 = \frac{1}{3} - 2 = -\frac{5}{3}$.
$u_2 = \frac{1}{3}u_1 + 1 - 2 = \frac{1}{3} \times \left(-\frac{5}{3}\right) - 1 = -\frac{5}{9} - 1 = -\frac{14}{9}$
$u_3 = \frac{1}{3}u_2 + 2 - 2 = \frac{1}{3} \times \left(-\frac{14}{9}\right) = -\frac{14}{27}$.

2. Algorithme permettant de déterminer à partir de quel rang on a $u_n > 100$:

variable U est un réel. n est un entier
entrée n prend la valeur 0
U prend la valeur 1
traitement
Tant que $U \leqslant 100$ **faire**
U prend la valeur $\frac{1}{3}U + n - 2$
n prend la valeur $n + 1$
Fin Tant que
sortie afficher n *(On obtient $n_0 = 71$.)*

3. (a) Montrons par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 4$, $u_n \geqslant 0$.
Initialisation
Calculons u_4 : $u_4 = \frac{1}{3}u_3 + 3 - 2 = \frac{1}{3} \times \left(-\frac{14}{27}\right) + 1 = -\frac{14}{81} + 1 = \frac{67}{81}$,
donc $u_4 \geqslant 0$. Donc l'inégalité est vraie au rang 4.
Hérédité
On suppose que pour un entier $n \geqslant 4$ on a : $u_n \geqslant 0$.
On cherche à montrer que $u_{n+1} \geqslant 0$.
On a : $u_n \geqslant 0$, donc $\frac{1}{3}u_n \geqslant 0$, donc $\frac{1}{3}u_n + n - 2 \geqslant n-2$, donc $u_{n+1} \geqslant n-2$
Or $n \geqslant 4$ donc $n - 2 \geqslant 2 > 0$, donc $u_{n+1} \geqslant 0$
L'inégalité est vraie au rang $n + 1$, donc la propriété est héréditaire.
Conclusion : on a montré par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 4$, $u_n \geq 0$.

(b)
- On a, pour tout entier n, $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2$, et on a vu, que pour tout entier $n \geqslant 4$, $u_n \geq 0$, donc, pour tout entier $n \geqslant 4$, $u_{n+1} \geqslant n-2$.
- Soit n un entier tel que $n \geqslant 5$, alors $n - 1 \geqslant 4$. Appliquons à $n - 1$ l'inégalité précédente, on obtient : $u_{(n-1)+1} \geqslant (n-1)-2$, c'est à dire $u_n \geqslant n - 3$.

Finalement, pour tout entier $n \geqslant 5$, $u_n \geqslant n - 3$.

(c) On a $\lim_{n\to+\infty}(n - 3) = +\infty$, et pour tout entier $n \geqslant 5$, $u_n \geqslant n - 3$, donc, par théorème de comparaison, $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

4. (a) Pour tout entier naturel n, on a :
$v_{n+1} = -2u_{n+1} + 3(n + 1) - \frac{21}{2} = -2(\frac{1}{3}u_n + n - 2) + 3n + 3 - \frac{21}{2} = -\frac{2}{3}u_n + n + \frac{7}{2}$,
donc $v_{n+1} = \frac{1}{3}(-2u_n + 3n + \frac{21}{2})$, donc $v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n$.
On en déduit que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{3}$.

(b) Comme (v_n) est géométrique, pour tout entier n, $v_n = v_0\left(\frac{1}{3}\right)^n$.
Or $v_0 = -2u_0 + 3 \times 0 - \frac{21}{2} = -2 - \frac{21}{2} = -\frac{25}{2}$.
$\boxed{\text{Donc, pour tout entier } n,\ v_n = -\frac{25}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n.}$

(c) Expression de u_n.
Or, on sait que pour tout $n \geqslant 0$, $v_n = -2u_n + 3n - \frac{21}{2}$.
Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$u_n = -\frac{1}{2}v_n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4} = -\frac{1}{2} \times \frac{-25}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}$.
$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{25}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}.}$

5. (a) Expressions de $S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$, et de $T_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

Pour S_n, on applique la somme des termes d'une suite géométrique.

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} v_k \\ &= v_0 + v_1 + \ldots + v_n \\ &= v_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \\ &= -\frac{25}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} \\ &= -\frac{25}{2} \times \frac{3}{2} \times \left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right) \\ &= -\frac{75}{4} \times \left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right) \end{aligned}$$

Expression de $T_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=0}^{n} u_k \\ &= \sum_{k=0}^{n}\left(-\frac{1}{2}v_k + \frac{3}{2}k - \frac{21}{4}\right) \\ &= -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} v_k + \frac{3}{2}\sum_{k=0}^{n} k - \sum_{k=0}^{n} \frac{21}{4} \\ &= -\frac{1}{2} \times S_n + \frac{3}{2} \times \frac{n(n+1)}{2} - \frac{21}{4} \times (n+1) \\ &= \frac{75}{8} \times \left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right) + \frac{3n(n+1)}{4} - \frac{21(n+1)}{4} \\ &= \frac{75}{8} \times \left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right) + \frac{(n+1)(3n-21)}{4} \end{aligned}$$