Chapitre 14 : Complément sur la dérivation

I Activité d'introduction

Exercice 1

1. Compléter le tableau de rappels sur la dérivation.

Expression de $f(x)$	a (constante)	x	x^2	x^n $(n \geqslant 1)$	$\frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$	$\sqrt{x}$ $(x > 0)$
Expression de $f'(x)$						

Expression de $f(x)$	e^x	$\ln(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$
Expression de $f'(x)$				

2. Des cas particuliers de dérivée dune composée de fonction
   u désigne une fonction dérivable sur un intervalle I, alors que a,b sont des réels.

Expression de $f(x)$	e^u	$\ln(u)$ $(u > 0)$	$\sin(ax+b)$	$\cos(ax+b)$
Expression de $f'(x)$				

3. Applications. Dériver les fonctions.
   (a) $f(x) = \mathrm{e}^{0,01x+9}$ ....
   (b) $f(x) = \ln(3x+1)$ ....
   (c) $f(x) = \sin\left(\frac{1}{2\pi}x + \pi\right)$ ....
   (d) $f(x) = \cos(5x-3)$ ....

II Composition de fonctions

Définition
Soit u une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et prenant ses valeurs dans une partie J de $\mathbb{R}$. Soit g une fonction définie sur J.
La composée de u suivie de g est la fonction f définie sur I par $f(x) = g(u(x))$.
On la note $g \circ u$.

Exercice 2
Déterminer l'expression de la fonction.

1. $f = g \circ u$ avec $g(x) = x^2$ et $u(x) = 2x+3$.
2. $h = g \circ u$ avec $g(x) = 2x+3$ et $u(x) = x^2$
3. $k = g \circ u$ avec $g(x) = 2x+3$ et $u(x) = \sin x$

III Dérivée d'une composée de deux fonctions

Exercice 3
On reprend les fonctions de l'exercice précédent. Dériver les fonctions f, h et k.

Théorème
Soient $u : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$ des fonctions dérivables.
Alors la fonction $f : x \mapsto g(u(x))$ (qui est bien définie) est dérivable sur I et

$$\text{pour tout } x \in I,\ f'(x) = g'(u(x)) \times u'(x).$$

Cela s'écrit aussi $(g \circ u)' = (g' \circ u) \times u'$

Exercice 4 (démonstration)
On rappelle que le taux d'accroissement d'une fonction f entre x_0 et x est $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

1. Soit $x_0 \in I$. Écrire le taux d'accroissement de u entre x_0 et x.
2. Vérifier que le taux d'accroissement de $g \circ u$ entre x_0 et x s'écrit
$$\frac{g(u(x)) - g(u(x_0))}{u(x) - u(x_0)} \times \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0}.$$
3. Passer à la limite lorsque $x \to x_0$ et conclure.

Propriété (cas particuliers)
Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.

Fonction g	Fonction $f = g \circ u$	Dérivée de f, soit $f' = (g \circ u)'$
e^x	e^u	$u'\mathrm{e}^u$
$\ln(x)$	$\ln(u)$ ($u > 0$ sur I)	$\dfrac{u'}{u}$
$\sin(x)$	$\sin(u)$	$u' \times \cos(u)$
$\cos(x)$	$\cos(u)$	$-u' \times \sin(u)$
x^n	u^n (n entier relatif) ($u \neq 0$ pour n négatif)	$nu^{n-1} \times u'$
$\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{1}{u}$ ($u \neq 0$)	$-\dfrac{u'}{u^2}$

Exercice 5
Dériver les fonctions suivantes sur $\mathbb{R}$.

1. $A(x) = \mathrm{e}^{-9x+5}$
2. $B(x) = \ln(3x^2 - 11)$
3. $C(x) = \sin(1 - x^2)$
4. $D(x) = (5x + 4)^3$