Interrogation n° 4. Correction Sujet 1

Exercice 1 (cours, 3 points)

Compléter les formules ou propriétés de cours.

1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$
2. $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = xx' + yy'$
3. Relation d'Al-Kashi : Soit MNP un triangle, on note $m = NP$, $n = MP$, et $p = MN$. $m^2 = n^2 + p^2 - 2np \cos \widehat{M}$

Exercice 2 (2 points)

Soit EFG un triangle tel que $EF = 5$, $EG = 7$, et l'angle $\widehat{FEG} = \dfrac{2\pi}{3}$ (soit 120 degrés). Déterminer la longueur FG.
D'après la relation d'Al-Kashi,
$e^2 = f^2 + g^2 - 2fg \cos \widehat{FEG} = 7^2 + 5^2 - 2 \times 7 \times 5 \cos(120°)$
$e^2 = 49 + 25 - 70 \times (-0,5) = 49 + 25 + 35 = 109.$

$\boxed{\text{Donc } FG^2 = 109, \text{ et } FG = \sqrt{109} \text{ (environ 10,44).}}$

Exercice 3 (5 points)

Soit ABC un triangle tel que $AB = 8$, $AC = 7$, et $BC = 5$.

1. En utilisant la formule d'Al-Kashi, déterminer l'angle $\widehat{BAC}$ à un degré près.
   $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{A}$, soit
   $25 = 49 + 64 - 2 \times 7 \times 8 \times \cos \widehat{A}$, donc $\cos \widehat{A} = \dfrac{49 + 64 - 25}{2 \times 7 \times 8} = \dfrac{88}{112} = \dfrac{11}{14}$.
   Avec la calcultatrice, $\widehat{A} = \arccos(\dfrac{11}{14}) \approx 38°$. $\boxed{\text{Donc } \widehat{A} \approx 85°.}$
2. Déterminer les deux autres angles du triangle à un degré près.
   On raisonne de même pour l'angle $\widehat{B}$.
   $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \widehat{B}$
   $49 = 25 + 64 - 2 \times 5 \times 8 \cos \widehat{B}$,
   donc $\cos \widehat{B} = \dfrac{25 + 64 - 49}{2 \times 5 \times 8} = \dfrac{40}{80} = \dfrac{1}{2}$. $\boxed{\text{Donc } \widehat{B} = \arccos(0,5) = 60°.}$
   Enfin, comme la somme des angles du triangle fait 180,
   $\widehat{C} = 180 - (\widehat{A} + \widehat{B}) \approx 180 - (38 + 60) \approx 82$. $\boxed{\text{Donc } \widehat{C} \approx 82°.}$

Exercice 4 (3 points)

Réaliser les conversion d'unités suivantes :

1. 0,64 dm en km. $\boxed{0{,}64 \text{ dm} = 0,000\,064 \text{ km}}$
2. 80 000 m^2 en cm^2. $\boxed{80\,000 \text{ m}^2 = 80000 \times 10^4 \text{ cm}^2 = 800\,000\,000 \text{ cm}^2.}$
3. 8 m/s en km/h. $\boxed{8 \text{ m/s} = 28{,}8 \text{ km/h}}$
4. 4531 s en hms $\boxed{4531 \text{ s} = 1 \text{ heure, 15 minutes, 31 secondes}}$

Exercice 5 (5 points)

Les questions sont indépendantes.

1. $\boxed{\left(\dfrac{1000}{0,1}\right)^{-4} = \left(\dfrac{10^3}{10^{-1}}\right)^{-4} = (10^4)^{-4} = 10^{-16}}$
2. $\boxed{9^{-4} \times 3^5 \times 81 = (3^2)^{-4} \times 3^5 \times 3^4 = 3^{-8+5+4} = 3^1 = 3}$
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\dfrac{1}{3}x - \dfrac{4}{5} = 2x + 1$.
   $\dfrac{5x - 12}{15} = 2x + 1$, puis $5x - 12 = 15(2x + 1)$, et $25x = -27$, $\boxed{x = -\dfrac{27}{25}.}$
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $2 - x < 11 + 4x$.
   $2 - x < 11 + 4x$, $-5x < 9$, et donc $\boxed{x > -\dfrac{9}{5}.}$
5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $-2x(2x + 7) = 0$.
   $x = 0$ ou $(2x + 7) = 0$, soit $x = 0$ ou $x = -\dfrac{7}{2}$. $\boxed{\text{Les solutions sont 0 et } -\dfrac{7}{2}.}$
6. Déterminer le tableau de signe sur $\mathbb{R}$ de $G(x) = (6x + 5)(12 - 3x)$.
   Valeurs clés : $6x + 5 = 0$ ssi $x = -\dfrac{5}{6}$, et $12 - 3x = 0$ ssi $x = 4$.

x	$-\infty$		$-5/6$		4		$+\infty$
$6x+5$		$-$	0	$+$		$+$	
$12-3x$		$+$		$+$	0	$-$	
$G(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Exercice 6 (2 points +1 bonus)

On donne les points $E(1;-4)$, $F(5;3)$, et $G(-2;-5)$.

1. Calculer $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EG}$.
   $\overrightarrow{EF}(x_F - x_E; y_F - y_E)$, donc $\overrightarrow{EF}(4;7)$. De même, $\overrightarrow{EG}(-3;-1)$.
   $\boxed{\text{Alors } \overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EG} = xx' + yy' = 4 \times (-3) + 7 \times (-1) = -12 - 7 = -19.}$
2. En déduire la mesure de l'angle $\widehat{FEG}$ à un degré près.
   $EF = \sqrt{(x_F - x_E)^2 + (y_F - y_E)^2} = \sqrt{4^2 + 7^2} = \sqrt{16 + 49} = \sqrt{65}$.
   $EG = \sqrt{(x_G - x_E)^2 + (y_G - y_E)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$. $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EG} = EF \times EG \times \cos(\widehat{FEG})$.
   Donc $\cos(\widehat{FEG}) = \dfrac{\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EG}}{EF \times EG} = \dfrac{-19}{\sqrt{65} \times \sqrt{10}}$.
   $\boxed{\text{À la calculatrice on obtient } \widehat{FEG} \approx 138° \text{ (138 degrés).}}$

Réponses du sujet 2.

Exercice 7 (cours, 3 points)

1. $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = ||\overrightarrow{u}|| \times ||\overrightarrow{v}|| \times \cos(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$
2. $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = xx' + yy'$
3. Relation d'Al-Kashi : Soit EFG un triangle, on note $e = FG$, $f = EG$, et $g = EF$.
   $e^2 = f^2 + g^2 - 2fg\cos(\widehat{E})$

Exercice 8 (2 points)

Soit EFG un triangle tel que $EF = 6$, $EG = 5$, et l'angle $\widehat{FEG} = \dfrac{5\pi}{6}$ (soit 150 degrés). Déterminer la longueur FG.

D'après la relation d'Al-Kashi, $e^2 = f^2 + g^2 - 2fg\cos(\widehat{E})$

$FG^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \times 5 \times 6 \times \cos(150°) = 25 + 36 - 60 \times (-\dfrac{\sqrt{3}}{2})$

$FG^2 = 61 + 30\sqrt{3}$.

$\boxed{\text{Donc } FG = \sqrt{61 + 30\sqrt{3}} \approx 10,6.}$

Exercice 9 (5 points)

Soit ABC un triangle tel que $AB = 6$, $AC = 11$, et $BC = 8$.

1. En utilisant la formule d'Al-Kashi, déterminer l'angle $\widehat{BAC}$ à un degré près.
   D'après la formule d'Al-Kashi, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$, soit
   $64 = 121 + 36 - 2 \times 11 \times 6 \times \cos\widehat{A}$, donc $\cos\widehat{A} = \dfrac{121 + 36 - 64}{2 \times 11 \times 6} = \dfrac{93}{132} = \dfrac{31}{44}$.
   Avec la calculatrice, $\widehat{A} = \arccos(\dfrac{31}{44}) \approx 45°$. $\boxed{\text{Donc } \widehat{A} \approx 45°.}$
2. Déterminer les deux autres angles du triangle à un degré près.
   On raisonne de même pour l'angle $\widehat{B}$.
   $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\widehat{B}$
   $121 = 64 + 36 - 2 \times 8 \times 6\cos\widehat{B}$,
   donc $\cos\widehat{B} = \dfrac{36 + 64 - 121}{2 \times 8 \times 6} = -\dfrac{21}{96} = -\dfrac{7}{32}$. $\boxed{\text{Donc } \widehat{B} = \arccos(\tfrac{-7}{32}) \approx 103°.}$
   Enfin, comme la somme des angles du triangle fait 180,
   $\widehat{C} = 180 - (\widehat{A} + \widehat{B}) \approx 180 - (45 + 103) \approx 32$. $\boxed{\text{Donc } \widehat{C} \approx 32°.}$

Exercice 10 (3 points)

Réaliser les conversion d'unités suivantes :

1. 0,64 dm en km. $\boxed{\text{0,64 dm = 0,000 064 km (ou } 6,4 \times 10^{-5} \text{ km)}}$
2. 60 m^3 en mm^3.
   $\boxed{\text{60 m}^3 = \text{60 000 000 000 mm}^3 \text{ (60 milliards, ou } 6 \times 10^{10} \text{ mm}^3)}$
3. 8 km/h en m/s. $\boxed{\text{8 km/h = 2,22 m/s environ}}$
4. 7330 s en hms (heures, minutes, secondes) $\boxed{\text{7330 s = 2h 2 min 10s}}$

Exercice 11 (5 points)

Les questions sont indépendantes.

1. $\boxed{\dfrac{100^3}{0,01^2} = \dfrac{(10^2)^3}{(10^{-2})^2} = \dfrac{10^6}{10^{-4}} = 10^{10}}$
2. $\boxed{\dfrac{4^3 \times 2^{-3}}{8^5} = \dfrac{2^6 \times 2^{-3}}{(2^3)^5} = \dfrac{2^3}{2^{15}} = 2^{-12}}$
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\dfrac{4}{3}x - \dfrac{1}{2} = 3x + 1$.
   $\dfrac{8x - 3}{6} = 3x + 1$, puis, $8x - 3 = 6(3x + 1)$, donc $10x = -9$, $\boxed{x = -0,9.}$
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $2 - 6x < 1 + x$.
   $2 - 6x < 1 + x$, $-7x < -1$, $\boxed{x > \dfrac{1}{7}.}$
5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $3x(5x + 1) = 0$.
   ($x = 0$ ou $5x + 1 = 0$), soit ($x = 0$ ou $x = -0,2$).
   $\boxed{\text{les solutions sont 0 et } -0,2.}$
6. Déterminer le tableau de signe sur $\mathbb{R}$ de $G(x) = (3x + 1)(2 - x)$.
   Valeurs clés : $3x + 1 = 0$ ssi $x = -\dfrac{1}{3}$, et $2 - x = 0$ ssi $x = 2$.

x	$-\infty$		$-1/3$		2		$+\infty$
$3x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$2-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$G(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Exercice 12 (2 points + 1 bonus)

Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(-2; -5)$, $B(1; -4)$, et $C(5; 3)$.

1. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
   $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$, $\overrightarrow{AB}(1 - (-2); -4 - (-5))$, soit $\overrightarrow{AB}(3; 1)$.
   De même, $\overrightarrow{AC}(7; 8)$.
   $\boxed{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = xx' + yy' = 3 \times 7 + 1 \times 8 = 29.}$
2. En déduire la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ à un degré près.
   $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$.
   $AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{7^2 + 8^2} = \sqrt{113}$.
   $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$.
   Donc $\cos(\widehat{BAC}) = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \times AC} = \dfrac{29}{\sqrt{113} \times \sqrt{10}}$.
   $\boxed{\text{À la calculatrice on obtient } \widehat{BAC} \approx 30° \text{ (30 degrés).}}$