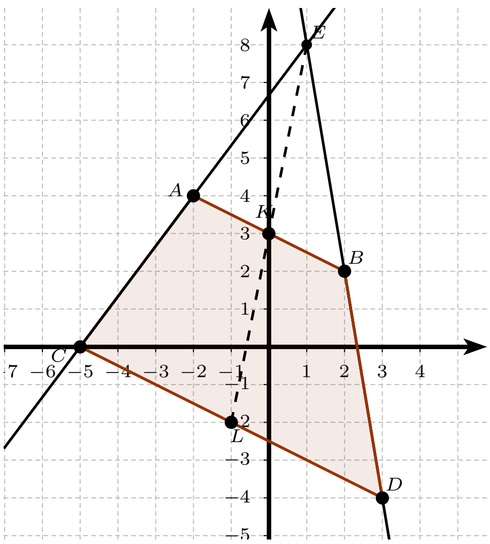
Interrogation n° 4
Réponses du sujet 1

Exercice 1 (5 points)
Compléter sur l'énoncé. Aucune justification n'est attendue.

1. La droite d'équation $2x - 5y + 1 = 0$ passe par le point $E(7;3)$.
2. La droite d'équation $y = -\dfrac{1}{2}x + 5$ admet pour vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -0,5 \end{pmatrix}$.
3. On donne $A(6;-1)$, $B(2;3)$.
   (a) Le coefficient directeur de la droite (AB) est -1.
   (b) La droite parallèle à l'axe des ordonnées et passant par A a pour équation réduite $x = 6$.
4. La droite parallèle à la droite d'équation $5x - y + 2 = 0$ et passant par $F(0;-4)$ a pour équation $y = 5x - 4$.

Exercice 2 (7 points)
Le plan est muni d'un repère $(O; I; J)$.
On considère les points $A(-2;4)$, $B(2;2)$, $C(-5;0)$ et le point D tel que $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AB}$.

1. (a) Quelle est la nature du quadrilatère $ABDC$? Justifier votre réponse.
   $(AB)//(CD)$ et $ABDC$ n'est pas croisé. $ABDC$ est un trapèze.
   (b) Calculer les coordonnées du point D.
   $D(3;-4)$.
2. (a) Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $6x + y - 14 = 0$.
   Vérifier que B et D appartiennent à $\mathcal{D}$.
   (b) Déterminer une équation de la droite (AC).
   (AC) : $-4x + 3y - 20 = 0$.
   (c) Montrer que (AC) et (BD) sont sécantes.
   Elles n'ont pas le même coefficient directeur : $\dfrac{4}{3} \neq -6$.
   (d) Calculer les coordonnées du point d'intersection E de (AC) et (BD).
   $E(1;8)$.
3. (a) Calculer les coordonnées du point K, milieu de $[AB]$ et du point L, milieu de $[CD]$.
   $K(0;3)$, et $L(-1;-2)$.
   (b) Montrer que les points E, K et L sont alignés.
   $\overrightarrow{EL}\begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{EK}\begin{pmatrix} -2 \\ -10 \end{pmatrix}$.
   Donc $\overrightarrow{EL} = 2\overrightarrow{EK}$, les vecteurs $\overrightarrow{EL}$ et $\overrightarrow{EK}$ sont colinéaires, donc E, K et L sont alignés, et K est le milieu de $[EL]$.



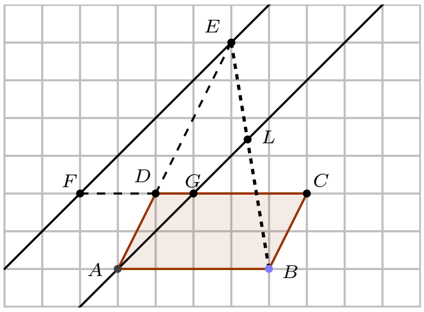
Exercice 3

Soit $ABCD$ un parallélogramme. Les points E, F et G sont définis par :

$$\overrightarrow{DE} = 2\overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{CF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CD},\text{ et } 3\overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}.$$

1.
$$\begin{array}{rcl} 3\overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GC} & = & \overrightarrow{0} \\ 3\overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{DC} & = & \overrightarrow{0} \\ 4\overrightarrow{GD} + \overrightarrow{DC} & = & \overrightarrow{0} \\ 4\overrightarrow{DG} & = & \overrightarrow{DC} \\ \overrightarrow{DG} & = & \frac{1}{4}\overrightarrow{DC} \end{array}$$

2. Figure



3.
$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{FE} & = & \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} \\ & = & -\frac{3}{2}\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CD} + 2\overrightarrow{AD} \\ & = & -\frac{1}{2}\overrightarrow{CD} + 2\overrightarrow{AD} \\ & = & \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD} \end{array}$$

En effet, $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB}$ car $ABCD$ est un parallélogramme.

4.
$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{AG} & = & \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DG} \\ & = & \overrightarrow{AD} + \frac{1}{4}\overrightarrow{DC} \\ & = & \overrightarrow{AD} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} \\ & = & \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \end{array}$$

De même, comme $ABCD$ est un parallélogramme, $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$.

5. On remarque que $\overrightarrow{FE} = 2\overrightarrow{AG}$.
Les vecteurs $\overrightarrow{FE}$ et $\overrightarrow{AG}$ sont colinéaires, donc $(AG)//(FE)$.

6. Question bonus :
Les points E, L et B sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{EL}$ et $\overrightarrow{EB}$ sont colinéaires.
On va exprimer ces deux vecteurs en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{EL} & = & \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AL} \\ & = & \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DA} + m\overrightarrow{AG} \\ & = & -2\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AD} + m\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) \\ & = & \frac{m}{4}\overrightarrow{AB} + (m-3)\overrightarrow{AD} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{EB} & = & \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} \\ & = & \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} \\ & = & \overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AD} \end{array}$$

On rappelle $\overrightarrow{EL} = \frac{m}{4}\overrightarrow{AB} + (m-3)\overrightarrow{AD}$.

D'après ces décompositions, les vecteurs $\overrightarrow{EL}$ et $\overrightarrow{EB}$ sont colinéaires si et seulement si $\overrightarrow{EL} = \frac{m}{4}\overrightarrow{EB}$, ce qui revient à

$$\begin{array}{rcl} -3 \times \frac{m}{4} & = & m-3 \\ -3m & = & 4m-12 \\ 7m & = & 12 \\ m & = & \frac{12}{7} \end{array}$$

Conclusion : Les points E, L et B sont alignés si et seulement si $m = \frac{12}{7}$, soit $\overrightarrow{AL} = \frac{12}{7}\overrightarrow{AG}$.

Réponses du sujet 2

Exercice 4 (5 points)

Compléter sur l'énoncé. Aucune justification n'est attendue.

1. La droite d'équation $x + 6y + 1 = 0$ passe par le point $E(5; -1)$.
2. La droite d'équation $6x - 11y + 3 = 0$ admet pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 11 \\ 6 \end{pmatrix}$.
3. On donne $A(-3; 2)$, $B(1; 4)$.
   (a) Le coefficient directeur de la droite (AB) est 0,5.
   (b) La droite parallèle à l'axe des abscisses et passant par A a pour équation réduite $y = 2$.
4. La droite parallèle à la droite d'équation $y = -x + 2$ et passant par $F(0; -4)$ a pour équation $y = -x - 4$.

Exercice 5 (7 points)

Le plan est muni d'un repère $(O; I; J)$.

On considère les points $A(-3; 2)$, $B(1; 4)$, $C(-2; -1)$ et le point D tel que $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AB}$.

1. (a) Quelle est la nature du quadrilatère $ABDC$? Justifier votre réponse.
   Comme $(AB)//(CD)$ et $ABDC$ n'est pas croisé, $ABDC$ est un trapèze.
   (b) Calculer les coordonnées du point D.
   $D(6; 3)$.
2. (a) Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $x + 5y - 21 = 0$.
   Vérifier que B et D appartiennent à $\mathcal{D}$.
   (b) Déterminer une équation de la droite (AC).
   (AC) : $3x + y + 7 = 0$.
   (c) Montrer que (AC) et (BD) sont sécantes.
   Elles n'ont pas le même coefficient directeur : $-\frac{1}{5} \neq -3$.
   (d) Calculer les coordonnées du point d'intersection E de (AC) et (BD).
   On trouve $E(-4; 5)$.
3. (a) Calculer les coordonnées du point K, milieu de $[AB]$ et du point L, milieu de $[CD]$.
   $K(-1; 3)$, et $L(2; 1)$.
   (b) Montrer que les points E, K et L sont alignés.