Correction de l'interrogation n° 6
Sujet 1

Exercice 1 (6 points)

1. (a) Soit (u_n) une suite **arithmétique** de raison r et de premier terme u_1.
Pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = u_1 + (n-1)r$.

   (b) Donner une formule de la somme des termes consécutifs d'une suite **géométrique** de raison différente de 0 et de 1.
Pour tout $n \geqslant 0$, $u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 \times \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

2. Soit (V_n) la suite arithmétique de premier terme $V_0 = 4$ et de raison 5.

   (a) Calculer V_{20}.
Pour tout $n \geqslant 0$, $V_n = V_0 + nr$. Donc $V_{20} = V_0 + 20r = 4 + 20 \times 5 = 104$.

   (b) Calculer $S_{20} = V_0 + V_1 + \cdots + V_{20}$.
$S_{20} = \dfrac{(V_0 + V_{20}) \times 21}{2} = \dfrac{(4+104) \times 21}{2} = 54 \times 21 = 54 \times 20 + 54 = 1080 + 54 = 1134$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$.

   (a) Exprimer en fonction de n, $T_n = 1 + \dfrac{2}{3} + \dfrac{4}{9} + \cdots + \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.
C'est une somme de termes consécutifs de la suite géométrique de 1er terme $1 = \left(\dfrac{2}{3}\right)^0$ et de raison $\dfrac{2}{3}$. Il y a $(n+1)$ termes puisqu'on va de $\left(\dfrac{2}{3}\right)^0$ à $\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$. $T_n = 1 \times \dfrac{1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \dfrac{2}{3}} = 3 \times \left(1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}\right)$.

   (b) Donner la valeur de T_{10} arrondie à 0,000 1 près. $T_{10} \approx 2,9653$.

Exercice 2 (4 points)

Le salaire de Monique est de 1600 euros en janvier 2013. Chaque mois il augmente de 9 euros.
On appelle v_0 le salaire du mois de janvier 2013, v_1 le salaire du mois de février 2013 et v_n le salaire du mois de rang $n+1$.

1. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.
$\boxed{\text{Pour tout } n \geqslant 0,\ v_{n+1} = v_n + 9.}$

2. Exprimer v_n en fonction de n.
(v_n) est la suite arithmétique de 1er terme $v_0 = 1600$ et de raison 9.
$\boxed{\text{Pour tout } n \geqslant 0,\ v_n = v_0 + nr = 1600 + 9n.}$

3. À quelle date le salaire de Monique dépassera-t-il pour la première fois 2000 euros ?
$v_n \geqslant 2000$ ssi $1600 + 9n \geqslant 2000$, soit $9n \geqslant 400$, $n \geqslant \dfrac{400}{9} \approx 44,4$.
Le plus petit entier n qui convient est $n = 45$.
$\boxed{\text{Le salaire dépasse 2000 euros pour la 1re fois le mois correspondant à } n = 45 \text{ soit en octobre 2016.}}$

4. Quelle somme totale percevra-t-elle comme salaire de janvier 2013 à décembre 2023 inclus ?
La période janvier 2013 à décembre 2023 correspond à exactement 11 années, soit $11 \times 12 = 132$ mois.
Il s'agit donc de calculer la somme des 132 premiers termes de la suite (v_n), de v_0 à v_{131}.
$v_{131} = v_0 + 131r = 1600 + 131 \times 9 = 2779$.

$$\begin{aligned} v_0 + v_1 + \cdots + v_{131} &= \frac{v_0 + v_{131}}{2} \times 132 \\ &= \frac{1600 + 2779}{2} \times 132 \\ &= 289\ 014 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Le montant total des salaires accumulés sur la période janvier 2013-décembre 2023 est de 289 014 euros.}}$

Exercice 3 (8 points + 1 bonus)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1000$ et pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = 0,9u_n + 90$.

1. Calculer u_1 et u_2.
$u_1 = 0,9 \times 1000 + 90 = 990$, et $u_2 = 0,9 \times 990 + 90 = 981$.

2. Justifier que (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.
$u_2 - u_1 = 981 - 990 = -9$ et $u_1 - u_0 = 990 - 1000 = -10$.
Donc $u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0$, (u_n) n'est pas arithmétique.
$\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{981}{990} \approx 0,991$, et $\dfrac{u_1}{u_0} = 0,99$.
Donc $\dfrac{u_2}{u_1} \neq \dfrac{u_1}{u_0}$, et (u_n) n'est pas géométrique.

3. On considère la suite (V_n) définie pour tout $n \geqslant 0$ par $V_n = u_n - 900$.

   (a) Calculer V_0 et V_1.
$V_0 = u_0 - 900 = 100$, et $V_1 = u_1 - 900 = 90$.

   (b) Montrer que la suite (V_n) est géométrique et préciser ses éléments caractéristiques (raison et premier terme).

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= u_{n+1} - 900 \\ &= 0,9u_n + 90 - 900 \\ &= 0,9u_n - 810 \\ &= 0,9(V_n + 900) - 810 \\ &= 0,9V_n + 810 - 810 \\ &= 0,9V_n \end{aligned}$$

Donc (V_n) est la suite géométrique de raison 0,9 et de 1er terme $V_0 = 100$.

(c) Exprimer V_n en fonction de n.
$V_n = V_0 \times q^n = 100 \times 0,9^n$.

4. En déduire que pour tout $n \geqslant 0$, $u_n = 100 \times (0,9)^n + 900$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = u_n - 900$, soit $u_n = V_n + 900$.
Donc $u_n = 100 \times 0,9^n + 900$.

5. Bonus
Soit $n \geqslant 0$. Déterminer l'expression en fonction de n de $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} u_k \\ &= \sum_{k=0}^{n}(100 \times 0,9^k + 900) \\ &= (\sum_{k=0}^{n} 100 \times 0,9^k) + \sum_{k=0}^{n} 900 \\ &= 100 \times \frac{1-0,9^{n+1}}{1-0,9} + 900 \times (n+1) \\ &= 1000(1-0,9^{n+1}) + 900 \times (n+1) \end{aligned}$$

Interrogation n° 6. Réponses du Sujet 2

Exercice 4 (6 points)

1. Compléter sur l'énoncé :
   (a) Soit (u_n) est une suite **géométrique** de raison q et de premier terme u_0.
   Pour tout $n \geqslant 0$, Pour tout $n \geqslant 0$, $u_n = u_0 \times q^n$.
   (b) Donner une formule de la somme des termes consécutifs d'une suite **arithmétique**.
   $u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \dfrac{u_0 + u_n}{2} \times (n+1)$.
2. Soit (V_n) la suite arithmétique de premier terme $V_0 = 11$ et de raison 6.
   (a) Calculer V_{20}. $V_{20} = 11 + 6 \times 20 = 131$
   (b) Calculer $S_{20} = V_0 + V_1 + \cdots + V_{20}$. $S = 1491$.
3. Soit un entier $n \geqslant 1$.
   (a) Exprimer en fonction de n, $T_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \cdots + \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$. $T_n = 1 - 0,5^n$.
   (b) Donner la valeur de T_{10} arrondie à 0,000 1 près. $T_{10} \approx 0,9990$.

Exercice 5 (6 points)

Le salaire net de Jeanne était de 1750 euros en janvier 2017. Chaque mois il augmente 7 de euros.
On appelle v_0 le salaire du mois de janvier 2017, v_1 le salaire du mois de février 2017 et pour tout $n \geqslant 0$, v_n le salaire du mois de rang $n+1$.

1. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n. Pour tout $n \geqslant 0$, $v_{n+1} = v_n + 7$.
2. Exprimer v_n en fonction de n. Justifier.
   (v_n) est la suite arithmétique de premier terme $v_0 = 1750$ et de raison 7 donc pour tout $n \geqslant 0$, $v_n = v_0 + nr = 1750 + 7n$.
3. À quelle date le salaire de Monique dépassera-t-il pour la première fois 2000 euros ?
   $v_n \geqslant 2000$ ssi $1750 + 7n \geqslant 2000$ ssi $n \geqslant \dfrac{250}{7} \approx 35,7$.
   Le plus petit entier n qui convient est 36, ce qui correspond au mois de janvier 2020. Le salaire dépasse pour la première fois 2 000 euros en janvier 2020.
4. Quelle somme totale percevra-t-elle comme salaire de janvier 2017 à décembre 2027 inclus ?
   La période janvier 2017 à décembre 2027 correspond à exactement 11 années, soit $11 \times 12 = 132$ mois.
   Il s'agit donc de calculer la somme des 132 premiers termes de la suite (v_n), de v_0 à v_{131}.
   $v_{131} = v_0 + 131r = 1750 + 131 \times 7 = 2667$.

$$\begin{aligned} v_0 + v_1 + \cdots + v_{131} &= \frac{v_0 + v_{131}}{2} \times 132 \\ &= \frac{1750 + 2667}{2} \times 132 \\ &= 291\,522 \end{aligned}$$

Le montant total des salaires accumulés sur la période janvier 2017-décembre 2027 est de 291 522 euros.

Exercice 6 (8 points + 1 bonus)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2000$ et pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = 0,8u_n + 50$.

1. Calculer u_1 et u_2. $u_1 = 1650$. $u_2 = 1370$.
2. Justifier que (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.
   Voir la correction du sujet 1 : on donne des contre-exemples.
3. On considère la suite (V_n) définie pour tout $n \geqslant 0$ par $V_n = u_n - 250$.
   (a) Calculer V_0 et V_1. $V_0 = 1750$, $V_1 = 1400$.
   (b) Montrer que la suite (V_n) est géométrique et préciser ses éléments caractéristiques (raison, premier terme).
   $V_{n+1} = u_{n+1} - 250 = 0,8(V_n + 250) + 50 - 250 = 0,8V_n$.
   (V_n) est géométrique de raison 0,8. $V_0 = u_0 - 250 = 1750$.
   (c) Exprimer V_n en fonction de n. $V_n = V_0 \times q^n = 1750 \times 0,8^n$.
4. En déduire que pour tout $n \geqslant 0$, $u_n = 1750 \times (0,8)^n + 250$.
   $u_n = V_n + 250 = 1750 \times (0,8)^n + 250$.
5. Bonus
   Soit $n \geqslant 0$. Déterminer l'expression en fonction de n de $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.
   $S_n = 1750 \times \dfrac{1-0,8^{n+1}}{1-0,8} + 250 \times (n+1) = 8750 \times (1-0,8^{n+1}) + 250 \times (n+1)$.