Exercices sur les dérivées et applications

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $[1;7]$ par $f(x)=\dfrac{x^2}{3-4x}$.

1. Justifier que f est dérivable sur $[1;7]$, et calculer $f'(x)$.
2. Déterminer un encadrement de $f(x)$ valable pour tout $x\in[1;7]$.

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $[-6;3]$ par

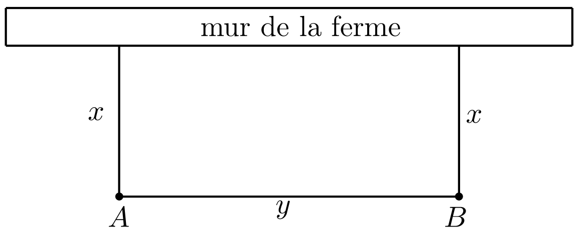
$$f(x)=\frac{1}{6}\big(-x^3-3x^2+9x-3\big).$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Calculer $f'(x)$.
2. En déduire le tableau de variation de f sur $[-6;3]$.
3. La courbe de f admet-elle des tangentes parallèles à l'axe des abscisses sur $[-6;3]$? Justifier. Si oui, donner une équation de chacune.
4. Justifier que la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 est la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y=\dfrac{3}{2}x-\dfrac{1}{2}$.
5. Déterminer la position relative de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{D}$. Justifier.
6. Tracer $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{D}$ dans un même repère orthonormé. On fera apparaître les tangentes parallèles à (Ox).

Exercice 3

Un fermier décide de réaliser un poulailler de forme rectangulaire le long du mur de sa maison.
Ce poulailler doit avoir une aire de 288 m^2.
Le but du problème est de déterminer où on doit placer les piquets A et B pour que la longueur de la clôture soit minimale.



La figure représente le poulailler accolé à la ferme en *vue de dessus*.
On appelle x la distance séparant chaque piquet au mur et y la distance entre les 2 piquets A et B.

1. Sachant que l'aire du poulailler est 288 m^2, exprimer y en fonction de x.
2. Démontrer que la longueur du grillage est, pour $x>0$, $l(x)=\dfrac{2x^2+288}{x}$.
3. Calculer la dérivée de l.
4. Étudier les variations de l sur $]0;+\infty[$.
5. En déduire les dimensions x et y pour lesquelles la clôture a une longueur minimale.

Exercice 4

Démontrer que pour tout $x\in[0;+\infty[$, on a $0\leqslant\dfrac{x+1}{x^2+3}\leqslant\dfrac{1}{2}$.
Indication : on pourra étudier une fonction.

Exercice 5

On considère la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{x^2+x+2}{x-1}$.
On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Montrer que pour tout $x\neq1$, $f(x)=x+2+\dfrac{4}{x-1}$.
3. Montrer que pour tout $x\neq1$, $f'(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$.
4. En déduire le tableau de variations de f.
5. On considère la droite Δ d'équation $y=x+2$. Étudier la position relative de $\mathscr{C}$ et Δ.
6. Tracer $\mathscr{C}$ et Δ dans un même repère orthonormé.
7. Montrer qu'il existe deux points de $\mathscr{C}$ en lesquels la tangente a pour coefficient directeur -3.
   Donner alors une équation de chacune de ces tangentes.

Exercice 6

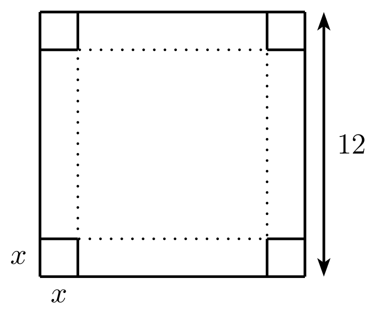
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{4x}{x^2+4}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.

1. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{-4x^2+16}{(x^2+4)^2}$.
2. Étudier les variations de f et donner son tableau de variation.
3. (a) Calculer une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.

   (b) Étudier les positions relatives de $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{T}$.
4. Donner deux nombres m et M tels que pour tout réel x de $[-4;4]$, on ait $m \leqslant f(x) \leqslant M$. Justifier votre réponse.

Exercice 7

Dans un morceau de carton carré de 12 cm de côté, on découpe dans chaque coin des carrés de x cm de côté.
En relevant les bords (suivnt les pointillés), on construit une boîte sans couvercle avec la feuille ainsi découpée.



1. Expliquer pourquoi les valeurs possibles de x appartiennent à l'intervalle $[0;6]$.
2. Exprimer le volume de la boîte $V(x)$ en fonction de x.
3. Déterminer le volume maximal de la boîte. Justifier.