1G - groupes 8 et 9 - Spécialité mathématiques
Correction du travail à distance n°4.

Exercice 1 (18 page 174)

1. $e^x \times e^x = e^{x+x} = e^{2x}$.
2. $e^x \times e^{-x} = e^{x-x} = e^0 = 1$.
3. $e^{1-x} \times e^{-1-x} = e^{1-x-1-x} = e^{-2x}$.

Exercice 2 (19 page 174)

1. $(e^x)^4 = e^{4x}$.
2. $(e^{2x})^{-1} = e^{2x\times(-1)} = e^{-2x}$.
3. $(e^{-x+1})^2 = e^{(-x+1)\times 2} = e^{-2x+2}$.

Exercice 3 (19 page 174)
Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

1. $\dfrac{e^x}{e^{0,01}} = e^{x-0,01}$
2. $\dfrac{e^x}{e^{0,01x}} = e^{x-0,01x} = e^{0,99x}$
3. $\dfrac{e^{2x+1}}{e^{x-1}} = e^{2x+1-(x-1)} = e^{x+2}$

Exercice 4 (34 page 175)
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 2e^x$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3 + 2e^x$.
Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$, on a $2e^x > 0$ et $3 + 2e^x > 3$.
Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3 + 2e^x > 0$.
Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5 (43 page 175)
Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{2x} - 1 = e^x(e^x - e^{-x})$.
En développant,
$e^x(e^x - e^{-x}) = e^x \times e^x - e^x \times e^{-x} = e^{x+x} - e^{x-x} = e^{2x} - e^0 = e^{2x} - 1$.
Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{2x} - 1 = e^x(e^x - e^{-x})$.

Exercice 6 (44 page 175)
Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(e^x - 1)(e^{-x} + 1) = e^x - e^{-x}$.
En développant,
$(e^x - 1)(e^{-x} + 1) = e^{x-x} + e^x - e^{-x} - 1 = e^0 + e^x - e^{-x} - 1 = 1 + e^x - e^{-x} - 1 = e^x - e^{-x}$.
Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(e^x - 1)(e^{-x} + 1) = e^x - e^{-x}$.

Exercice 7 (45 page 175)

1. (a) $e^{5x+2} \times e^{x-5} = e^{5x+2+x-5} = e^{6x-3}$.
   (b) $\dfrac{e^{x^2+1}}{e^{x+2}} = e^{x^2+1-(x+2)} = e^{x^2-x-1}$.
   (c) $(e^{2x+7})^2 \times (e^{1-x})^3 = e^{2(2x+7)} \times e^{3(1-x)} = e^{4x+14+3-3x} = e^{x+17}$
2. Montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{1+e^{2x}}{1+e^x} = \dfrac{e^{-x}+e^x}{e^{-x}+1}$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{e^{-x}+e^x}{e^{-x}+1} = \dfrac{e^x(e^{-x}+e^x)}{e^x(e^{-x}+1)} = \dfrac{e^0+e^{2x}}{e^0+e^x} = \dfrac{1+e^{2x}}{1+e^x}$.
   D'où le résultat.

Exercice 8 (62 page 176)

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $A(x) = \mathrm{e}^x - 2x\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x(1-2x)$.
   Comme $\mathrm{e}^x > 0$ sur $\mathbb{R}$, $A(x)$ a le même signe que $1-2x$.
   $1 - 2x = 0$ ssi $x = \dfrac{1}{2}$.

x	$-\infty$		$1/2$		$+\infty$
$1-2x$		$+$	0	$-$	
e^x		$+$		$+$	
$A(x) = (1-2x)\mathrm{e}^x$		$+$	0	$-$	

2. $B(x) = x\mathrm{e}^{-x} - x^2\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}(x - x^2)$.
   Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-x} > 0$,
   $B(x)$ a le même signe que $x - x^2 = x(1-x)$.
   $x - x^2$ est une expression du second degré, qui a pour racines 0 et 1, et qui est négative (signe de "a") à l'extérieur des racines.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$B(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Exercice 9 (63 page 176)

1. $A(x) = 4\mathrm{e}^{-x} - x^2\mathrm{e}^{-x} = (4-x^2)\mathrm{e}^{-x} = (2-x)(2+x)\mathrm{e}^{-x}$.
   Une exponentielle est toujours strictement positive, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-x} > 0$.
   Donc $A(x)$ a le même signe que $4 - x^2 = (2-x)(2+x)$, qui est du second degré ayant pour racines 2 et -2 et qui est négatif (signe de "a") à l'extérieur des racines.

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$A(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

2. $B(x) = x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{x+2} = x\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x\mathrm{e}^2 = \mathrm{e}^x(x - \mathrm{e}^2)$.
   Comme $\mathrm{e}^x > 0$, $B(x)$ a le même signe que $x - \mathrm{e}^2$.

x	$-\infty$		e^2		$+\infty$
$B(x)$		$-$	0	$+$	

Exercice 10 (11 page 181)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = 3 + x\mathrm{e}^x$.

1. Dérivée.
   Par produit et somme de fonctions dérivables, g est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 0 + 1\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x = (1+x)\mathrm{e}^x$.
2. Variations de g.
   Comme $\mathrm{e}^x > 0$ sur $\mathbb{R}$, $g'(x)$ est du signe de $(x+1)$.

$x+1=0$ ssi $x=-1$.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	$3-\mathrm{e}^{-1}$	$\nearrow$	

$g(-1) = 3 + (-1)\mathrm{e}^{-1} = 3 - \mathrm{e}^{-1}$.

3. Extremum
   D'après la question précédente, g admet un minimum en -1, ce minimum est de $3-\mathrm{e}^{-1}$.

Exercice 11 (90 page 178)
La fonction f est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^2}{2\mathrm{e}^x}$.

1. Montrons que f' est du signe de $2x - x^2$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2\mathrm{e}^x \neq 0$ car $\mathrm{e}^x > 0$.
   Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ par quotient de fonctions dérivables.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{2x \times 2\mathrm{e}^x - x^2 \times 2\mathrm{e}^x}{(2\mathrm{e}^x)^2} = \dfrac{2\mathrm{e}^x(2x-x^2)}{2\mathrm{e}^x \times 2\mathrm{e}^x} = \dfrac{2x-x^2}{2\mathrm{e}^x}$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2\mathrm{e}^x > 0$, donc $f'(x)$ a le même signe que $2x - x^2$.
2. Variations de f.
   $2x - x^2 = x(2-x)$ est une expression du second degré qui a pour racines 0 et 2.
   Elle est négative (signe de "a") à l'extérieur des racines.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$2x-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	$2\mathrm{e}^{-2}$	$\searrow$	

$f(0) = \dfrac{0^2}{2\mathrm{e}^0} = \dfrac{0}{2} = 0$.
$f(2) = \dfrac{2^2}{2\mathrm{e}^2} = \dfrac{2}{\mathrm{e}^2} = 2\mathrm{e}^{-2}$.