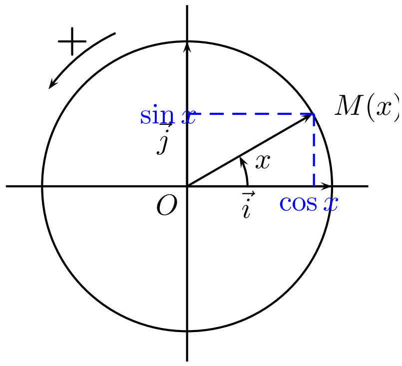
Chapitre 12 : Fonctions cosinus et sinus

I Rappels de trigonométrie

I.1 Cosinus et sinus d'un réel

Définition
Soit $x \in \mathbb{R}$. Notons $M(x)$ l'image de x sur le cercle trigonométrique.
Le cosinus de x est l'abscisse de M dans le repère $\left(O; \vec{i}\,; \vec{j}\right)$. On le note $\cos x$.
Le sinus de x est l'ordonnée de M dans $\left(O; \vec{i}\,; \vec{j}\right)$. On le note $\sin x$.

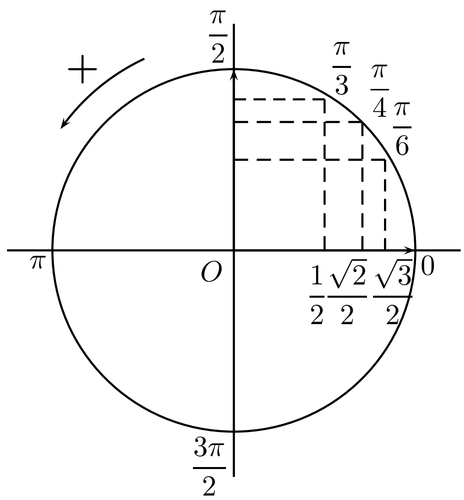


Propriété (Conséquences immédiates)
Pour tout x réel, on a :

- $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$.
- Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$.
- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

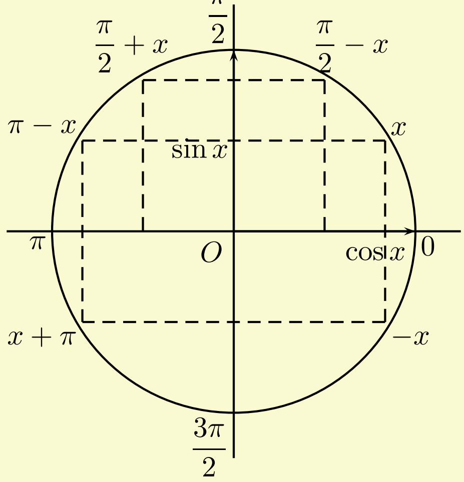
Propriété (valeurs remarquables)

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0



Théorème (angles associés)
Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\cos(-x) &= \cos(x)\\
\sin(-x) &= -\sin(x)\\
\cos(x+\pi) &= -\cos(x)\\
\sin(x+\pi) &= -\sin(x)\\
\cos(\pi - x) &= -\cos(x)\\
\sin(\pi - x) &= \sin(x)\\
\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \sin(x)\\
\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \cos(x)\\
\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= -\sin(x)\\
\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= \cos(x)
\end{aligned}$$

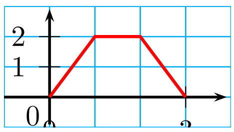


II Fonction périodique, fonction paire, fonction impaire

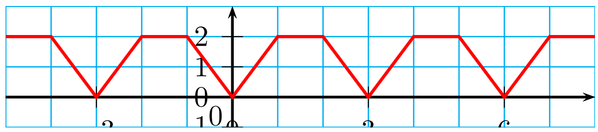
Définition (fonction périodique de période T)
Soient f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, et $T > 0$ un nombre strictement positif.
On dit que f est périodique de période T (ou T-périodique) lorsque pour tout x réel :

$$f(x+T) = f(x).$$

Conséquence graphique
Lorsqu'une fonction est T-périodique, sa courbe représentative est invariante par la translation de vecteur $T\vec{i}$.
Il suffit alors de connaître sa courbe sur n'importe quel intervalle de longueur T (par exemple $[0; T]$) pour pouvoir la compléter entièrement par des translations.



$\xrightarrow[\text{de période 3}]{f \text{ périodique}}$



Définition (fonction paire)
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
On dit que f est paire lorsque pour tout $x \in R$, $f(-x) = f(x)$.

Conséquence graphique
Lorsque f est paire, sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Définition (fonction impaire)
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
On dit que f est impaire lorsque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = -f(x)$.

Conséquence graphique
Lorsque f est paire, sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine du repère (le point O).

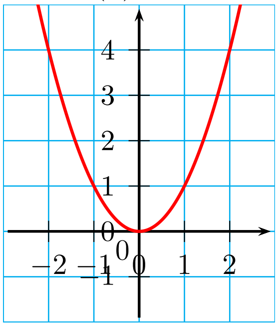
Remarque

1. Les fonctions du type x^2, x^4, x^n avec n entier pair sont des fonctions paires.
2. Les fonctions du type x^3, x^5, x^n avec n impair sont des fonctions impaires.
3. Il n'y a qu'une seule fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui soit à la fois paire et impaire, c'est la fonction nulle (pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0$).
4. Il existe des fonctions qui sont ni paires ni impaires.
   Par exemple, $f : x \mapsto 3x + 1$.
5. On peut définir étendre la définition de fonction paire ou impaire aux fonctions dont l'ensemble de définition de f est un ensemble D symétrique par rapport 0 (pour tout $x \in \mathbb{R}$, si $x \in D$, alors $-x \in D$).
   Par exemple, la fonction inverse, définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ n'est pas définie sur $\mathbb{R}$.
   Elle est définie sur $\mathbb{R}^* =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ qui est symétrique par rapport à 0.
   La fonction inverse est impaire car pour tout $x \neq 0$, $f(-x) = \dfrac{1}{-x} = -\dfrac{1}{x} = -f(x)$.
   Sa courbe représentative est une hyperbole qui a le point O pour centre de symétrie.

Quelques exemples avec des fonctions de référence

fonction carré

$f(x) = x^2$

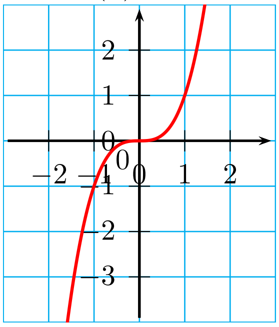


$D_f = \mathbb{R}$

f est paire

fonction cube

$f(x) = x^3$

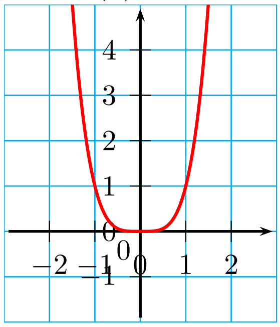


$D_f = \mathbb{R}$

f est impaire

puissance quatrième

$f(x) = x^4$

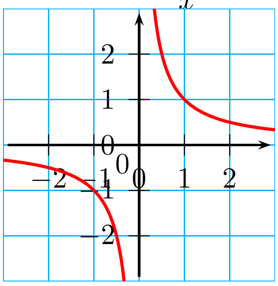


$D_f = \mathbb{R}$

f est paire

fonction inverse

$f(x) = \dfrac{1}{x}$

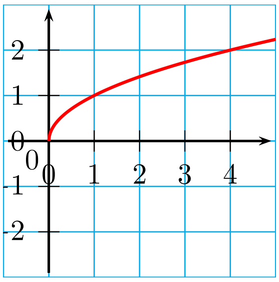


$D_f =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$

f est impaire

fonction racine carrée

$f(x) = \sqrt{x}$

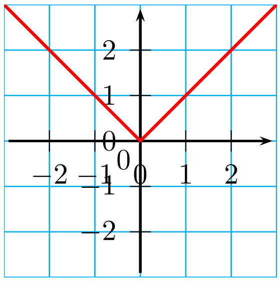


$D_f = [0; +\infty[$

ni paire ni impaire

fonction valeur absolue

$f(x) = |x|$



$D_f = \mathbb{R}$

f est paire

Remarque (intérêt des fonctions périodiques, paires, impaires)

— Lorsque qu'une fonction f est périodique de période $T > 0$, il suffit d'étudier la fonction sur un intervalle de longueur T, par exemple $[0; T]$.
En effet, si l'on connaît la courbe de la fonction sur $[0; T]$, il suffit de reproduire le "motif" de la courbe sur $[0; T]$ à l'aide de translations de vecteur $T\overrightarrow{i}$ pour compléter le tracé.

— Lorsque la fonction est paire, on peut se limiter à étudier la fonction sur $[0, +\infty[$.
On complète le tracé à l'aide de la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

— Lorsque la fonction est impaire, on peut se limiter à étudier la fonction sur $[0, +\infty[$.
On complète le tracé à l'aide de la symétrie par rapport à l'origine du repère.

III Fonctions cosinus et sinus

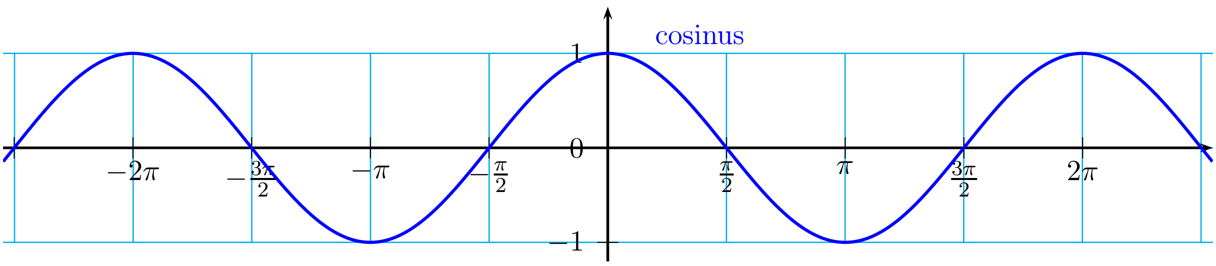
Théorème

1. Les fonctions sin et cos sont définies sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodiques.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x+2\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x+2\pi) = \sin(x)$
2. La fonction cos est paire et la fonction sin est impaire.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(-x) = \cos(x)$, et $\sin(-x) = -\sin(x)$.
3. Tableaux de variation sur $[0; 2\pi]$.

x	0		π		2π
$\cos x$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1

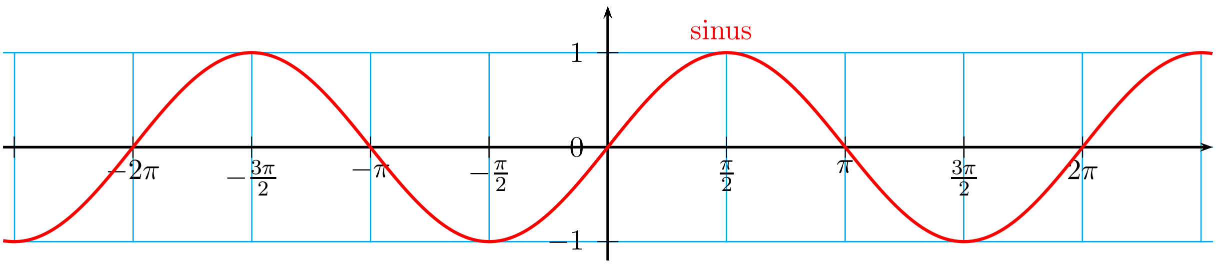
x	0		$\pi/2$		$3\pi/2$		2π
$\sin x$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0

Représentation graphique de la fonction cosinus



La courbe de la fonction cosinus est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (fonction paire).

Représentation graphique de la fonction sinus



La courbe de la fonction sinus est symétrique par rapport au point O, origine du repère (fonction impaire).

Remarque
Les courbes représentatives des fonctions cosinus et sinus sont appelées des sinusoïdes.

IV Cercle trigonométrique vide