1re G. Interrogation de mathématiques n° 4

Correction du Sujet 1

Exercice 1 (cours, 6 points)

1. Le taux d'accroissement de f entre a et $a+h$ est $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.
2. Une équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse a est : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.
3. Tableau des dérivées usuelles :

Fonction f	Dérivée f'	Intervalle de validité
$f(x) = c$ (constante)	$f'(x) = 0$	$I = \mathbb{R}$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	$I = \mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$	$I = \mathbb{R}$
$f(x) = x^n$, $n \leqslant -1$	$f(x) = nx^{n-1}$	$I =]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$I =]0;+\infty[$

Exercice 2 (5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 5x$

1. En revenant à la définition, étudier la dérivabilité de f en 2, et montrer que $f'(2) = -1$.
   Soit $h \neq 0$.

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{(2+h)^2 - 5(2+h) - (2^2 - 5\times 2)}{h}$$
$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{h^2+4h+4-10-5h+6}{h} = \frac{h^2-h}{h} = \frac{h(h-1)}{h}$$
$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = h-1$$

Donc $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = -1$.

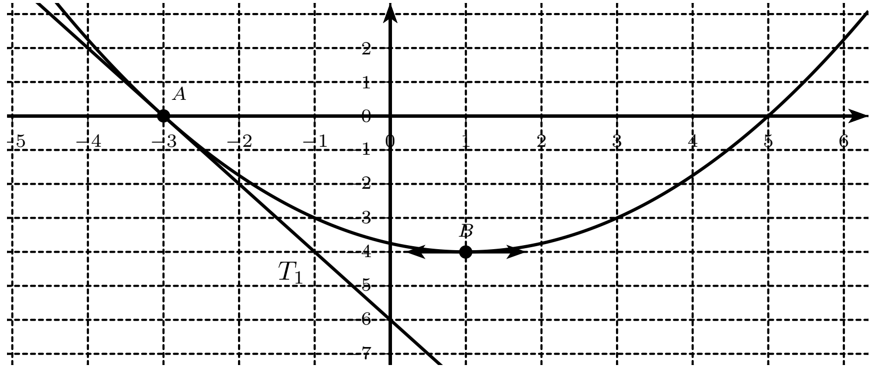
$\boxed{\text{Donc } f \text{ est dérivable en 2 et } f'(2) = -1.}$

2. En déduire une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 2.
   On sait que $f'(2) = -1$.
   On rappelle que $f(x) = x^2 - 5x$. Donc $f(2) = 2^2 - 5\times 2 = -6$.
   $y = f'(2)(x-2) + f(2) = -1(x-2) - 6 = -x - 4$.

   La tangente à la courbe de f au point d'abscisse 2 a pour équation $y = -x - 4$.

Exercice 3 (3 points)

On a tracé ci-contre la courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. La droite T_1 est tangente à la courbe en A, et la courbe admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point B.



1. Déterminer $f'(-3)$. Justifier.

   $f'(-3)$ est le coefficient directeur de la tangente au point A d'abscisse -3, on lit $f'(-3) = -2$.

2. Déterminer graphiquement un autre nombre dérivé de f. Justifier.
   De même, $f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 1.

   Comme la tangente à la courbe au point d'abscisse 1 est parallèle à l'axe des abscisses, $f'(1) = 0$.

Exercice 4 (6 points)

Pour chaque fonction f, donner l'expression de la dérivée $f'(x)$, et en déduire le nombre dérivé $f'(a)$ pour la valeur de a demandée.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^4$, et $a = -2$.

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 4x^3$, donc $f'(-2) = 4\times(-2)^3 = -32$.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -4x + 7$, et $a = -1$.

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -4$ donc $f'(-1) = -4$.

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -5$, et $a = 9$.

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 0$ donc $f'(9) = 0$.

4. Pour tout $x > 0$, $f(x) = \dfrac{1}{x^4}$, et $a = 1$.

   On a, pour tout $x > 0$, $f(x) = \dfrac{1}{x^4} = x^{-4}$.

   Pour tout $x > 0$, $f'(x) = -4x^{-4-1} = -4x^{-5} = -\dfrac{4}{x^5}$.
   Donc $f'(1) = -\dfrac{4}{1^5} = -4$.

1re G. Interrogation de mathématiques n° 4

Correction du Sujet 2

Exercice 5 (cours, 6 points)

1. Le taux d'accroissement de f entre a et $a+h$ est $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.
2. Une équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse a est : $y = f'(a)(x-a)+f(a)$.
3. Tableau des dérivées usuelles :

Fonction f	Dérivée f'	Intervalle de validité
$f(x)=x$	$f'(x)=1$	$I=\mathbb{R}$
$f(x)=ax+b$	$f'(x)=a$	$I=\mathbb{R}$
$f(x)=x^2$	$f'(x)=2x$	$I=\mathbb{R}$
$f(x)=x^3$	$f'(x)=3x^2$	$I=\mathbb{R}$
$f(x)=x^n$, $n\geqslant 1$	$f(x)=nx^{n-1}$	$I=\mathbb{R}$
$f(x)=\sqrt{x}$	$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$I=]0;+\infty[$

Exercice 6 (5 points)

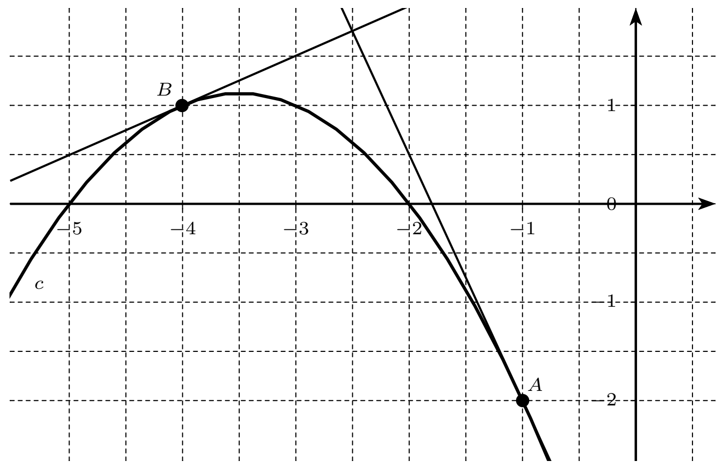
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3x^2+x$

1. En revenant à la définition, étudier la dérivabilité de f en -1, et montrer que $f'(-1)=-5$.
   Soit $h\neq 0$.
   $\dfrac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \dfrac{3(-1+h)^2+(-1+h)-(3\times(-1)^2-1)}{h}$
   $= \dfrac{3(h^2-2h+1)+h-1-2}{h} = \dfrac{3h^2-5h}{h} = 3h-5.$
   $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = -5.$
   Donc f est dérivable en -1 et $f'(-1)=-5$.
2. En déduire une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse -1.
   On a $f'(-1)=-5$.
   $f(-1)=3\times(-1)^2-1=2.$
   $y=f'(-1)(x-(-1))+f(-1)=-5(x+1)+2=-5x-3.$
   La tangente à la courbe de f au point d'abcisse -1 a pour équation $y=-5x-3$.

Exercice 7 (3 points)

On a tracé ci-contre la courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et les tangentes à cette courbe aux points A et B.

1. Déterminer $f'(-4)$. Justifier.
   $f'(-4)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point B d'abscisse -4. $f'(-4)=0,5.$
2. Déterminer graphiquement un autre nombre dérivé. Justifier.
   $f'(-1)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point A d'abscisse -1. $f'(-1)=-2,5.$



Exercice 8 (6 points)

Pour chacune des fonctions f, donner l'expression de la dérivée $f'(x)$, et en déduire le nombre dérivé $f'(a)$ pour la valeur de a demandée.

1. Pour tout $x>0$, $f(x)=\dfrac{1}{x}$, et $a=-2$.
   Pour tout $x>0$, $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$, donc $f'(-2)=-\dfrac{1}{(-2)^2}=-\dfrac{1}{4}$.
2. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=2x+7$, et $a=-1$.
   Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=2$, donc $f'(-1)=2$.
3. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{2}$, et $a=11$.
   Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=0$,donc $f'(11)=0$.
4. Pour tout $x>0$, $f(x)=\dfrac{1}{x^3}$, et $a=1$.
   Pour tout $x>0$, $f(x)=x^{-3}$, donc $f'(x)=-3x^{-3-1}=-3x^{-4}=-\dfrac{3}{x^4}$, donc $f'(1)=-\dfrac{3}{1^4}=-3$.